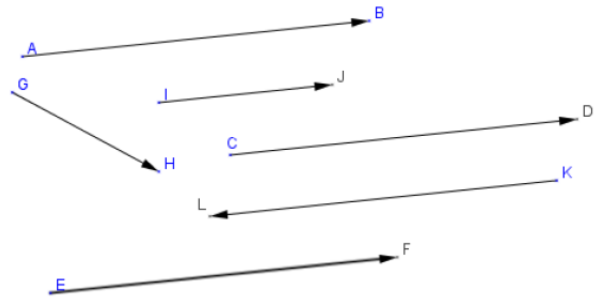
EXERCICES – LES VECTEURS

Exercice 1 (Identifier des relations entre vecteurs)

Partie 1 :

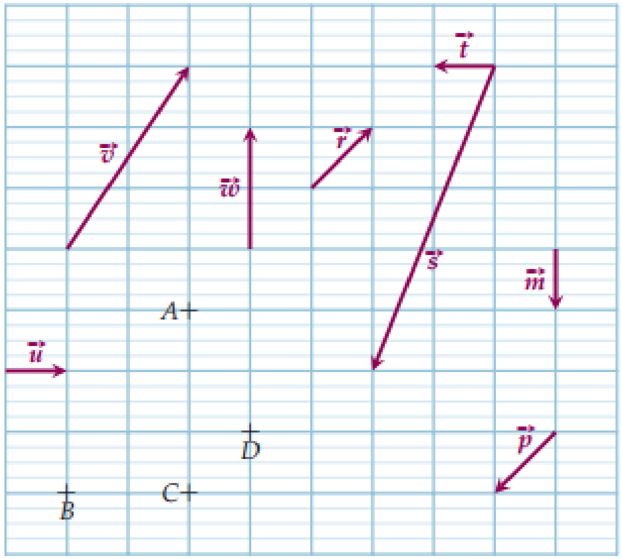
Citez tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.



Partie 2 :

À partir de la figure ci-dessous, citer un vecteur :

1) opposé à $\overrightarrow{CD}$;
2) de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AC}$;
3) de même direction que $\overrightarrow{BC}$ mais de sens contraire ;
4) égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$.

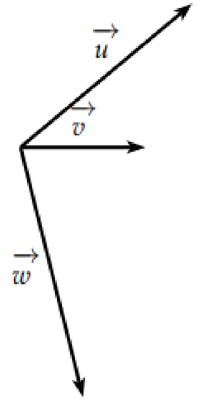


Exercice 2 (Construire des vecteurs)

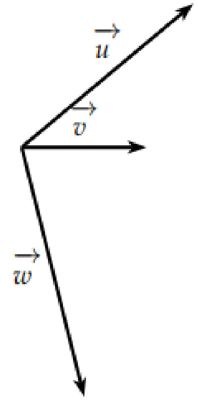
Partie 1 (sans coordonnées)

On donne trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Sur les deux figures suivantes tracer la somme $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ de deux manières :

- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$



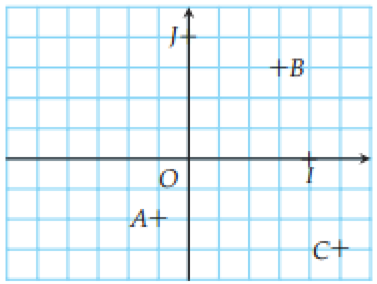
- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$



Partie 2 (sans coordonnées) :

Tracer un représentant des vecteurs ci-dessous

- $\vec{u} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$
- $\vec{v} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
- $\vec{w} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$



Partie 3 (avec coordonnées) :

1) Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$, tracer les vecteurs suivants :
$\vec{u}(-2; 5)$; $\vec{v}(4; 3)$; $\vec{w}(-1; -2)$

2) Tracer ensuite les vecteurs :
$\vec{u} + \vec{v}$; $-5\vec{v}$; $\vec{w} - \vec{u}$

Exercice 3 (Placer un point)

Partie 1 (sans coordonnées)

A et B sont deux points tels que AB = 6 cm. Placer les points M et N définis par les relations suivantes :

$$2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad 2\overrightarrow{NA}-5\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{0}$$

Partie 2 (sans coordonnées)

A et B sont deux points distincts donnés. Placer les points M, N, P et Q tels que :

a) $\overrightarrow{AM}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{NA}=3\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{BP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

Partie 3 (sans coordonnées)

a) Tracer un triangle ABC quelconque.

b) Placer les points I, J, K et L tels que $\overrightarrow{AI}=-2\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{LC}=2\overrightarrow{AB}$

Partie 4 (Avec coordonnées)

Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $E(2;-1)$, $F(-3;4)$ et $G(1;4)$.
Déterminer les coordonnées du point H pour que $EFGH$ soit un parallélogramme.

Partie 5 (Avec coordonnées)

Soient les points $A(3;-2)$, $B(-1;7)$, $C(2;3)$.

1) Calculer les coordonnées de $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
2) Soit le point $M(x;y)$ tel que $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
Calculer les coordonnées du point M.

Exercice 4 (Relation de Chasles)

Partie 1 :

Écrire le plus simplement possible.

1) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}$
2) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AA}$
3) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}$
4) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}$
5) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}$
6) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}$

Écrire le plus simplement possible.

1) $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}$
2) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BD}$
3) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}$
4) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DB}$
5) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{EM}-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{EC}$
6) $-\overrightarrow{AU}+\overrightarrow{SH}-\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{MU}$

Partie 2 :

1) Simplifier les écritures suivantes en utilisant la relation de Chasles.

a) $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$
b) $\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$
c) $\vec{w}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AB}$

2) Démontrer que pour tous points A, B et C : $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$
3) ABCD est un parallélogramme et M un point quelconque. Démontrer que :

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{0}$$

Partie 3 :

Simplifier les expressions suivantes :

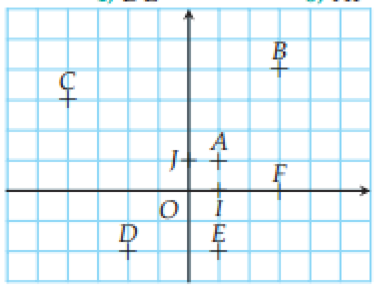
1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}$ 2) $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{OC}$ 3) $\overrightarrow{FG}-\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}\right)-\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GB}\right)$

Exercice 5 (Lire les coordonnées d'un vecteur)

Partie 1

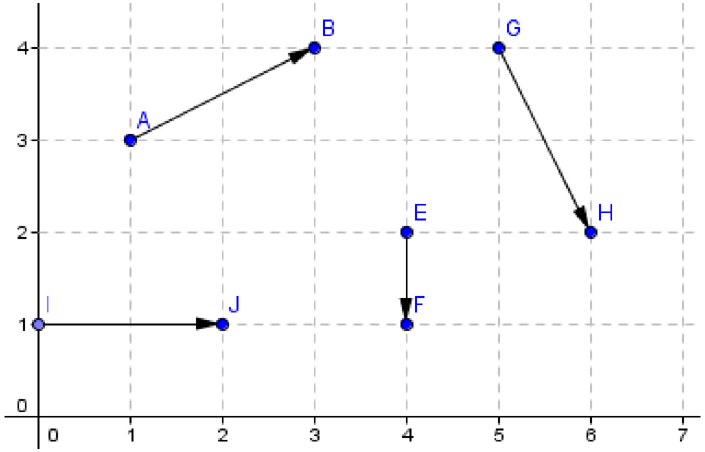
Lire les coordonnées des vecteurs suivants.

1) $\overrightarrow{AB}$
2) $\overrightarrow{AC}$
3) $\overrightarrow{CA}$
4) $\overrightarrow{DE}$
5) $\overrightarrow{AE}$
6) $\overrightarrow{AF}$



Partie 2

1) A partir du graphique, déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :



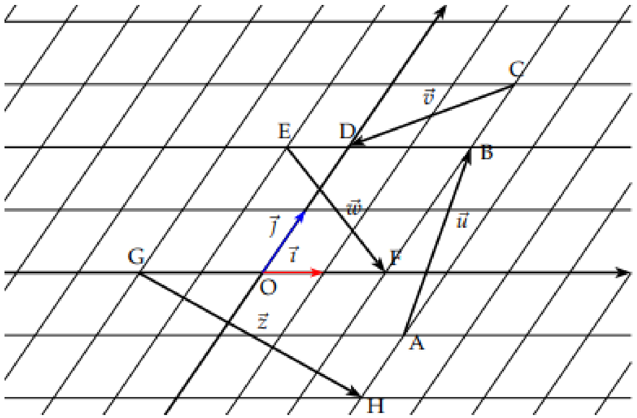
a) $\overrightarrow{AB}$ f) $\vec{v} = -2\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{GH}$ g) $\vec{w} = \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GH}$

c) $\overrightarrow{EF}$ d) $\overrightarrow{IJ}$ e) $\vec{u} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{GH}$

Partie 3

a) Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H

b) Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$.



Exercice 6 (Calculer les coordonnées d'un vecteur)

Partie 1 :

Soient les points A(-2 ; 3) ; B(-1 ; -5) ; C(3 ; -2) ; D(5 ; 4)

Déterminer les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}$; ; $\overrightarrow{AC}$

Partie 2 :

Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A(1;2)$, $B(-2;5)$ et $C(-3;-3)$.

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 7 (Calculer une norme)

En reprenant la partie 1 de l'exercice 6, calculer les normes des vecteurs :

$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}$; ; $\overrightarrow{AC}$

Exercice 8 (Calculer un milieu)

ABC est un triangle, I est le milieu de [BC] et J le milieu de [AI]. On choisit le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

1) Calculer les coordonnées de I et J.

2) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que : $\vec{u} = 2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC}$

Exercice 9 (Montrer une égalité vectorielle)

Partie 1 (sans coordonnées) :

Soit ABC un triangle rectangle en A.

1) Construire les points D et E tels que :
- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$

2) Quelle est la nature du quadrilatère $BCDE$? Justifier.

Partie 2 (sans coordonnées) :

Tous les résultats devront être démontrés.

1) Construire un parallélogramme $ABCD$ de centre O. Nommer I le milieu de $[OC]$.

2) Construire A' le symétrique de A par rapport à D et O' le symétrique de O par rapport à B.

3) a) Démontrer que $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{DB}$.

b) Démontrer que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OO'}$.

c) En déduire que I est le milieu de $[A'O']$.

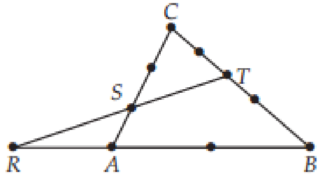
Partie 3 (avec coordonnées) :

Dans un plan muni d'un repère, on considère les points $A(3;5)$, $B(2;-1)$, $C(-2;-4)$ et $D(-1;2)$.
Prouver que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 10 (Montrer une colinéarité/alignement/parallélisme)

Partie 1 (avec et sans coordonnées)

On considère le triangle ABC. R est un point de (AB), S un point de (AC) et T un point de (BC).



À partir de la figure, déterminer les valeurs des réels α, β et γ tels que :

- $\overrightarrow{AR} = \alpha\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AS} = \beta\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BT} = \gamma\overrightarrow{BC}$

Dans la suite, on se propose de démontrer que les points R, S et T sont alignés en utilisant deux méthodes.

Partie A : méthode géométrique

Dans cette partie, on utilise des égalités vectorielles.

1) Montrer que

a) $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

2) En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{RT}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3) Vérifier que $\overrightarrow{RS} = \frac{5}{9}\overrightarrow{RT}$. Conclure.

Partie B : méthode analytique

On considère le repère $(A; B, C)$.

1) Donner les coordonnées des points suivants : A, B, C, S et R.

2) Calculer les coordonnées du point T.

3) Montrer que les coordonnées de $\overrightarrow{ST}$ sont $\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{15}\right)$.

4) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SR}$ sont colinéaires.

5) Conclure.

Partie 2 (avec coordonnées)

Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

1) $\vec{u}(-1; 2)$ et $\vec{v}(1; 1)$ 2) $\vec{u}(-3; 2)$ et $\vec{v}(6; -4)$ 3) $\vec{u}(-1; 4)$ et $\vec{v}(\frac{5}{4}; -5)$ 4) $\vec{u}(0; 1)$ et $\vec{v}(2; 0)$

Les points A, B et C sont-ils alignés ?

1) $A(2; 8)$; $B(3; 11)$ et $C(-1; -1)$ 2) $A(1; 0)$; $B(-3; 4)$ et $C(2; 3)$

3) $A(2; -1)$; $B(-1; 5)$ et $C(-2; 6)$ 4) $A(1; 3)$; $B(3; 5)$ et $C(4; 6)$

5) $A(-1; -1)$; $B(0; -3)$ et $C(3; -9)$ 6) $A(-1; 6)$; $B(2; -6)$ et $C(1; -3)$

Exercice 11 (Problème sans)

1) Soit un triangle ABC. On considère les points I et J tels que : $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Démontrer que A, I et J sont alignés (on pourra faire une figure).

2) Soit un triangle ABC. On note B' le symétrique de B par rapport à A, I le milieu de [B'C] et M le point tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Démontrer que B, M etI sont alignés (on pourra faire une figure).

3) Soit le parallélogramme ABCD et les points E et F définis par $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$

Démontrer que C, E et F sont alignés.

4) Soit un parallélogramme ABCD, I le milieu de [AB] et E le point tel que $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$

Démontrer que A, E et C sont alignés.

5) Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC]. Soient D et E définis par
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$ et
$\overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{BA}$

Démontrer que I est le milieu de [DE]

6) Soit ABC un triangle et K le milieu de [BC]. Soient L et M définis par
$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB}$ et
$$\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$$

Démontrer que M est le milieu de [LC]

7) Soit un parallélogramme ABCD. Soit I le milieu de [BC] et J le milieu de [CD]. Soit H défini par $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

Démontrer que les droites (HI) et (KJ) ne sont pas parallèles.

8) Soit un triangle ABC. Soient E, F et H les points définis par $\overrightarrow{EC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CH} = -\frac{9}{7}\overrightarrow{BC}$

Démontrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. En déduire que E, F et H sont alignés.

Exercice 12 (Problèmes avec) :

Partie 1 :

Dans un repère orthonormé, on donne les points : $A(-1;2)$, $B(7;-8)$ et $E(7;2)$

a) Démontrer que le point E appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB].

b) Déterminer les coordonnées du point F, symétrique de E par rapport au centre I du cercle $\mathscr{C}$.

c) Quelle est la nature que quadrilatère AEBF

Partie 2 :

Dans un repère, on donne les points : $A(1;-1)$, $B(-1;-2)$ et $C(-2;2)$

a) Déterminer les coordonnées du point G vérifiant : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

b) Déterminer les coordonnées du points D vérifiant : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

c) Faire une figure. Que peut-on conjecturer pour les points B, G et D ? Démontrer cette conjecture.

Partie 3 :

Dans un repère orthonormal, $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère les points : $A(-4;2)$, $B(-2;-4)$, $C(5,-3)$ et $D(4;6)$. On appelle I, J, K, L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

1) Placer les points A, B, C, D.

2) Calculer les coordonnées des points I, J, K, et L. Placer les points I, J, K et L.

3) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$. Que peut-on dire du quadrilatère IJKL ?

4) Calculer les longueurs IJ et IL et JL. Le quadrilatère IJKL est-il un rectangle ? Pourquoi ?

Partie 4 :

Dans chaque cas, déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires

a) $\vec{u}(2;6)$ $\vec{v}(m;3)$

b) $\vec{u}(-m;0)$ $\vec{v}(1;-3)$

c) $\vec{u}(27;2m)$ $\vec{v}(2m;3)$

Partie 5 :

ABCD est un rectangle.

a) Faire une figure et placer les points I, J, K et L tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$$

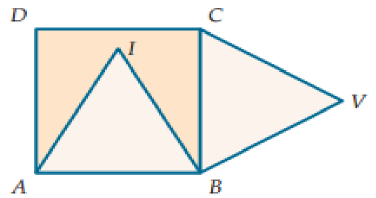
b) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$, exprimer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$.

c) En déduire la nature du quadrilatère IJKL.

d) Démontrer que le centre du rectangle est aussi le milieu du segment [IK].

Partie 6 :

Sur la figure ci-dessous, on considère le carré $ABCD$ de côté 5 cm et les triangles équilatéraux ABI et BCV.



1) Construire la figure en vraie grandeur.

On se place dans le repère $(A;B,D)$.

2) Calculer les coordonnées des points I et V.

3) Démontrer que les points D, I et V sont alignés.