METHODES A CONNAITRE – LES VECTEURS

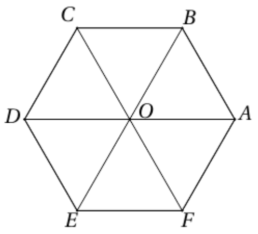
Problème A : Identifier des relations entre vecteurs

Questions-types :
- Citer trois vecteurs égaux au vecteur $\vec{u}$
- Citer trois vecteurs de même direction que le vecteur $\vec{u}$

Procédure :
Bien connaître les trois notions qui définissent un vecteur :
- Direction (la droite => même direction = parallèles)
- Sens (Sens de la flèche, le parcours de la droite => même sens = même orientation de la flèche)
- Norme (longueur => même norme = même longueur)

Connaître les définitions du cours :
Egalité : même direction, même sens, même norme
Opposé : même direction, sens opposés, même norme
Colinéaires : même direction

Exemples : Citer deux vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$ (l'hexagone est régulier)



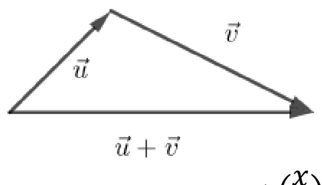
A vous de jouer : Dans la figure précédente, citer un vecteur de même direction mais pas de même norme que $\overrightarrow{EF}$

Problème B : Construire des vecteurs (somme, produit par un réel)

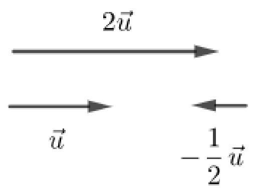
Questions-types : *- Tracer un représentant du vecteur $\vec{u}$*

Procédure :
Sans coordonnées $\vec{u}$
1) Isoler le vecteur $\vec{u}$ dans l'égalité le définissant.
2) Prendre un point de départ quelconque sur la figure.
3) A partir de ce point, tracer la translation correspondant au premier vecteur de l'égalité du (1). Il faut reporter le vecteur au niveau de ce point.
4) Le point d'arrivée du premier vecteur correspond au point de départ de la seconde translation (si elle existe). A recommencer autant de fois que nécessaire en utilisant les règles :

$\vec{u} + \vec{v}$



$k \times \vec{u} + \vec{v}$ (attention multiplier par un nombre peut changer sens et norme)

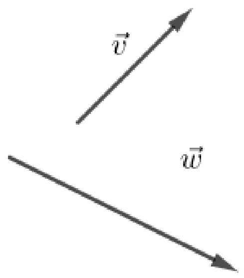


Avec coordonnées : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1) On prend une origine arbitraire.
2) On reporte x fois le vecteur $\vec{\imath}$ et y fois le vecteur $\vec{\jmath}$ (cela revient souvent à compter les carreaux, horizontales pour $\vec{\imath}$ et verticales pour $\vec{\jmath}$) pour un repère orthonormé.
3) Attention si le repère n'est pas orthonormé !!!

Exemples : 1)Tracer un représentant du vecteur $\vec{u} = \vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$

2) Dans un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) de votre choix, tracer un représentant du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$



<u>A vous de jouer :</u> 1)Tracer un représentant du vecteur $\vec{u} = 2\vec{v} + \vec{w}$

2) Dans un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) de votre choix, tracer un représentant du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Problème C : Placer un point défini par une égalité vectorielle

<u>Questions-types :</u> - Placer le point A tel que $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

- Déterminer les coordonnées de D telles que ABCD soient un parallélogramme.

<u>Procédure :</u>

<u>Sans coordonnées $\overrightarrow{BA} = 2\vec{u} + \vec{v}$ (placer A)</u>

1) Transformer l'égalité vectorielle de façon à obtenir un seul vecteur contenant le point A à gauche de l'égalité (comme point d'arrivée). On pourra utiliser la relation de Chasles, les règles d'algèbre, des symétries…

2) Prendre le point B comme point de départ.

3) A partir de ce point, tracer la translation correspondant au premier vecteur de l'égalité du (1)

4) Le point d'arrivée du premier vecteur correspond au point de départ de la seconde translation (si elle existe). A recommencer autant de fois que nécessaire. Le dernier point d'arrivée est le point A.

<u>Avec coordonnées</u> : Trouver les coordonnées de A telles que $\overrightarrow{BA} = \vec{u}$

1) Traduire l'énoncé par une égalité vectorielle si nécessaire (Formules du cours : milieu et symétrie centrale => $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, parallélogramme =>$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, autres égalités…)

2) Calculer les coordonnées des vecteurs des deux côtés de l'égalité en posant comme inconnues x_A et y_A les coordonnées de A.

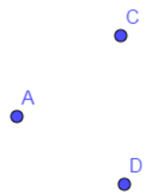
3) Transformer l'égalité des vecteurs en égalité de coordonnées :

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \leftrightarrow x_B - x_A = x$ et $y_B - y_A = y$

4) Résoudre les deux équations pour trouver x_A et y_A

<u>Exemples :</u> 1) Placer le point B tel que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$

2) Dans un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) ; on donne les points $E(2\,;3)$; $F(-1\,;5)$ et $G(3\,;4)$; Déterminer les coordonnées de H telles que EFGH soit un parallélogramme.



A vous de jouer : 1) Placer le point I tel que $\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$
2) Dans un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) ; on donne les points $E(-3\,;4)$; $F(7\,;8)$ et $G(1\,;2)$; Déterminer les coordonnées de H telles que EFHG soit un parallélogramme.

Problème D : Utiliser la relation de Chasles pour simplifier une expression

Questions-types : Simplifier l'expressions suivante :

Procédure :
1) Transformer les - en + en inversant les lettres des vecteurs concernés. Factoriser si nécessaire.
2) Repérer les vecteurs qui commencent et finissent par un même point
3) Utiliser la relation de Chasles pour simplifier l'expression.

Exemples : Simplifier $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OC}$

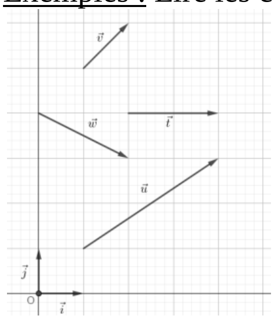
A vous de jouer : Simplifier
1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

Problème E : Lire les coordonnées d'un vecteur

Questions-types : - Lire les coordonnées du vecteur $\vec{u}$

Procédure : Dans un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$)
- Lire combien de $\vec{\imath}$ (abscisse x) et combien de $\vec{\jmath}$ (ordonnées y) il faut reporter pour rejoindre l'extrémité du vecteur depuis son origine.

Exemples : Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$



A vous de jouer : Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{t}$

Problème F : Calculer les coordonnées d'un vecteur

Questions-types : - Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$
Déterminer les coordonnées de $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$

Procédure :
Un vecteur définie par deux points de coordonnées connues :
1) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ avec A$(x_A; y_A)$ et B$(x_B; y_B)$

Un vecteur définie par une égalité vectorielle : $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$
1) Isoler le vecteur recherché dans l'égalité
2) Calculer les coordonnées des vecteurs du membre de droite.

3) Appliquer les règles sur l'addition et la multiplication par un réel pour trouver les coordonnées du membre de droite.

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix} \qquad k\times\vec{u}\begin{pmatrix}k\times x\\k\times y\end{pmatrix}$

Exemples :

1) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$ avec $C(2;-4)$ et $D(-3;1)$
2) Déterminer les coordonnées de $\vec{u}=2\overrightarrow{DC}-3\overrightarrow{AC}$ avec $A(1;3)$

A vous de jouer : Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{DC}$ avec $C(1;6)$ et $D(-2;-1)$

Déterminer les coordonnées de $\vec{u}=2\overrightarrow{AD}-4\overrightarrow{CA}$ avec $A(1;3)$

Problème G : Calculer une norme

Questions-types : - Calculer la longueur AB

Procédure :

1) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$
2) Appliquer la formule :

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$$

Exemples : Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec $A(2;5)$ et $B(3;-4)$

A vous de jouer : Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{CD}$ avec $C(-5;4)$ et $D(-2;1)$

Problème H : Calculer un milieu

Questions-types : - Calculer les coordonnées du milieu I du segment [AB]

Procédure :

- Appliquer la formule : $x_I=\frac{x_A+x_B}{2}$ et $y_I=\frac{y_A+y_B}{2}$

Exemples : Calculer les coordonnées du milieu I du segment [AB] avec $A(2;5)$ et $B(3;-4)$

A vous de jouer : Calculer les coordonnées du milieu J du segment [CD] avec $C(-5;4)$ et $D(-2;1)$

Problème I : Montrer une égalité vectorielle

Questions-types : Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d)

Procédure : Démontrer une égalité vectorielle du type $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{GI}$

Sans coordonnées :

1) Faire une figure

2) Au brouillon, traduire toutes les données de l'énoncé en égalités vectorielle. Par exemple ABCD parallélogramme signifie que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$; I milieu de [AB] signifie que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, etc…

3) On prend le coté gauche de l'égalité et à l'aide de la relation de Chasles, on introduit les points permettant d'obtenir le coté droit de l'égalité (ici E, F, G et I)

4) A l'aide des relations du 1) on élimine les vecteurs non présents dans le coté gauche de l'égalité, on fait apparaitre des points encore manquants…

5) Si on arrive pas à retrouver le membre de droite, on essaie de partir du coté droit et de retrouver une forme commune aux deux membres. En effet, si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DR}$ et $\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{DR}$ alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{GI}$

Avec coordonnées :

1) On définit un repère à partir de la figure et on exprime les coordonnées des points à partir de cette figure
2) On calcule les coordonnées du membre de droite et les coordonnées du membre de gauche.
3) Si les coordonnées des deux membres sont égales alors l'égalité est prouvée.

Exemples : 1) Soit ABC un triangle. Soient E, F et H tels $\overrightarrow{EC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CH} = -\frac{9}{7}\overrightarrow{BC}$

Démontrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

2) Soient les points $A(-2; 1)$; $T(1; 6)$; $R(3; 3)$ et $E(0; -2)$ Montrer que $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{ER}$

Soit un triangle ABC. On donne les points D et E définis par :

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Montrer que : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Utiliser la méthode sans coordonnées et la méthode avec.

Problème J : **Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires, deux droites sont parallèles, trois points sont alignés.**

Questions-types : *- Démontrer que (AB) et (CD) sont parallèles*
- Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

Procédure (pour montrer que des vecteurs sont colinéaires) :
Avec des coordonnées
Si pour les vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$; $xy'-x'y=0$ alors les vecteurs sont colinéaires.
En utilisant des égalités entre vecteurs :
1) Décomposer $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ en fonctions de deux vecteurs non colinéaires.
2) Prouver que $\vec{u}=k\vec{v}$ avec k un réel.
Prouver que (AB) et (CD) sont parallèles ↔ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
Prouver que A, B et C sont alignés ↔ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemples :
A) Démontrer que A(2 ;1), B(3 ;2) et C(4 ;3) sont alignés.
B) Soit ABCD un parallélogramme, et I et J des points tels que $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Démonter que (IJ) et (AC) sont parallèles.

A vous de jouer :
a) Soit ABCD un quadrilatère et J un point tel que $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$. Démonter que (AD) et (BJ) sont parallèles.
b) Les points A(2 ; 5) ; B(-2 ; 1) et C(-2 ; -3) sont-il alignés ?