EXERCICES SUITES

Exercice 1 (Révisions)

Partie 1 :

Pour les suites ci-dessous, calculer u_1, u_2 et u_3

1) $u_n = \frac{n+1}{2n-1}$ 2) $u_n = \sqrt{n+2}$ 3) $u_n = 3n^2 + 2n - 1$

4) $u_{n+1} = 2u_n + 1$ *et* $u_0 = -1$ 5) $u_{n+1} = \sqrt{{u_n}^2 + 1}$ *et* $u_0 = 2$

a) $u_n > 10$ b) $u_n \leq 4$ c) $u_n \geq 20$ d) $u_n < -5$

Partie 2 (Tracer la représentation graphique d'une suite)

1) Tracer la représentation graphique des suites ci-dessous en y plaçant les 5 premiers termes.

a) $u_n = 2n - 2$ b) $v_n = \frac{1}{n+1}$ c) $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 2$ *et* $w_0 = 1$

Partie 3 (Déterminer le sens de variations d'une suite)

Etudier le sens de variation des suites u , v et w définie ci-dessous:

1) $u_n = -\frac{3}{2}n + \frac{1}{4}$ 2) $v_n = \frac{2n}{n+1}$ 3) $\begin{cases} w_0 = -2 \\ w_{n+1} = w_n + n^2 \end{cases}$

Partie 4 (tableur)

On a $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$. $u_0 = 3000$.

À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

On considère la suite : $u_{n+1} = 2u_n + n - 3$

Proposer une formule à écrire en C3 pour obtenir par recopie vers la droite les termes de la suite (u_n)

	A	B	C	D	E	F
1						
2	n	0	1	2	3	4
3	un	3	3	4	7	14

Partie 5 (Modéliser une suite)

L'iode 131 est un produit radioactif utilisé en médecine. Il peut cependant être dangereux lorsqu'on le reçoit en grande quantité.

On considère un échantillon d'une population de noyaux d'iode 131 comportant 10^6 noyaux au début de l'observation. On considère que le nombre de noyaux diminue chaque jour de 8,3 %.

On note u_n le nombre de noyaux de cet échantillon au bout de n jours. On a donc $u_0 = 10^6$.

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

2) Traduire en langage mathématique les questions suivantes puis y répondre (on pourra utiliser la calculatrice)

a) A partir de combien de temps le nombre de noyaux de cet échantillon sera inférieur à 10^4 ?

b) Combien y a-t-il de noyaux au bout de 10 jours ?

3) Répondre aux questions suivantes à l'aide de la calculatrice et donner une interprétation au résultat trouvé.

a) Calculer u_4

b) Résoudre $u_n < 1000$

Partie 6 (Suite arithmétique ?)

Déterminer si les suites ci-dessous sont arithmétiques :

1) $u_n = 3n + 4$ 2) $u_n = \frac{1}{n+1}$ 3) $u_n = \frac{2^n}{3}$

Partie 7 (Déterminer et exploiter une formule explicite – suite arithmétique)

Dans toutes les questions, on sait que (u_n) est arithmétique

1) Sachant que $u_{10} = 10$ et $u_{30} = -10$, trouver u_0 et r.

2) Sachant que $u_4 = 5$ et $u_{13} = 12$, trouver u_0 et r

Partie 8 (Calculer une somme arithmétique)

Calculer les sommes suivantes :

1) $S = 3 + 6 + 9 + \cdots + 645$ 2) $S = \sum_{n=1}^{n=12} 2n$ 3) $S = \sum_{p=0}^{p=n+1} p$

4) Soit la suite $u_{n+1} = u_n + 5$et $u_0 = 3$. Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{15}$

Partie 9 (Suite géométrique ?)

Déterminer si les suites ci-dessous sont géométriques :

1) $u_n = -7n + 2$ 2) $u_n = \frac{5}{2n+1}$ 3) $u_n = \frac{-5^n}{3}$ 4) $u_n = \frac{2^n}{3^{n+2}}$

Partie 10 (Déterminer et exploiter une formule explicite – suite géométrique)

Dans toutes les questions, on sait que (u_n) est géométrique

1) Sachant que $u_6 = 64$ et $u_9 = -512$, trouver u_0 et q

2) Sachant que $u_5 = -1$ et $u_2 = 3$, trouver u_0 et r

Partie 11 (Calculer une somme géométrique)

Calculer les sommes suivantes :

1) $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024$

1) On sait que $u_0 = 95$ et $u_{n+1} = 0{,}97 \times u_n$

Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{24}$

Partie 12 (Synthèse)

Victor et Sandra sont embauchés dans une entreprise le 1er janvier 2010 à des conditions différentes.
Victor commence avec un salaire mensuel net de 1 100 euros,
et Sandra avec un salaire mensuel net de 1 200 euros.
On souhaite étudier l'évolution de leurs salaires.

On note u_n le salaire mensuel de Victor au 1er janvier de l'année $2010 + n$, et v_n celui de Sandra.
Ainsi $u_0 = 1100$ et $v_0 = 1200$.

1. Au 1er janvier de chaque année, le salaire mensuel de Victor augmente de 2%.
   - (a) Calculer u_1 et u_2.
   - (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n ; quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   - (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   - (d) Calculer le salaire mensuel de Victor en 2015.
2. Au 1er janvier de chaque année, le salaire mensuel de Sandra augmente de 50 euros.
   - (a) Calculer v_1 et v_2.
   - (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n ; quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   - (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   - (d) Calculer le salaire mensuel de Sandra en 2015.
3. On souhaite comparer l'évolution des deux salaires.
   A l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année le salaire mensuel de Victor dépassera celui de Sandra.

Exercice 2 (Majorant/minorant)

Partie 1 :

1) Montrer que la suite de terme général :
   - a) $n^2 - 4n + 6$ est minorée et en donner un minorant ;
   - b) $-3n^2 + 9n - 4$ est majorée et en donner un majorant ;
   - c) $\dfrac{n^2 + \cos(n)}{n+1}$ est minorée et en donner un minorant (indication : $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$) ;
   - d) $\dfrac{8n+1}{n+5}$ est bornée par 0 et 8 ;
   - e) $\dfrac{-n^2 - 2n + 1}{n^2 + 3n + 2}$ est bornée par -1 et $\dfrac{1}{2}$;
2) Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n - 1}$ est bornée par 2 et 5.

Partie 2 :

Pour les cas suivants, préciser si la suite (u_n) est majorée, minorée, bornée

a) $u_n = \sin n$ b) $u_n = \dfrac{1}{1+n^2}$ c) $u_n = 2^n$

d) $u_n = n + \cos n$ e) $u_n = (-1)^n \times n^2$

Partie 3 :

En utilisant la méthode la plus adaptée, étudier les variations de la suite (u_n) dans chacun des cas ci-dessous et en déduire si u_0 est un majorant ou un minorant de (u_n) :

1) $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$ pour tout $n \geqslant 0$;
2) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n - 5n^2 - 2$ pour tout $n \geqslant 0$;
3) $u_n = 2n^3 - 3n^2 - 120n + 3$ pour tout $n \geqslant 0$;
4) $u_n = \dfrac{5}{3^{n+1}}$ pour tout $n \geqslant 0$;
5) $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$ pour tout $n \geqslant 0$.

Partie 4 :

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

Démontrer par récurrence que pour tout naturel n, $0 < u_n < 2$ et que (u_n) est croissante

Exercice 3 (convergence monotone)

Partie 1 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{10}(u_n + 1)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3) On admet que la limite ℓ de la suite vérifie
$$\ell = \frac{1}{10}(\ell + 1)^2 \text{ et } \ell \leqslant 5.$$
Déterminer cette limite.

Partie 2 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que (u_n) est convergente.

Partie 3 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Dans un repère orthonormé, tracer les droites d'équation $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 4$.

b) Sans calcul, placer les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.

c) Conjecturer une minoration, une majoration et les variations de (u_n).

2) Démontrer ces conjectures.

3) En déduire que (u_n) est convergente.

4) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4 (Calculs de limites)

Partie 1 :

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 + \frac{2}{n} - \frac{8}{n^2} + \frac{1}{n^3}$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{0{,}236^n + 5}{10 - \frac{5}{n^{12}}}$

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\sqrt{n} + \frac{5}{\sqrt{n}} - 6$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{0{,}5^n}$

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{-0{,}5^n}$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} 5(-0{,}4)^n - 0{,}4 \times 5^n$

Partie 2 :

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n+1}$ 2) $\lim_{n\to+\infty} 5n^2 + 2n - 6$ 3) $\lim_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n}$

4) $\lim_{n\to+\infty} -3n(n^2 - 2)$ 5) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+2n+5}{n^2+3n+1}$ 6) $\lim_{n\to+\infty} 5n^2 - 6n + 6$

7) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$ 8) $\lim_{n\to+\infty} 7^n - 3^n$ 9) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n-2^n}{4^n}$

Partie 3 :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} n - \sqrt{n}$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n - 5^n}{3^n + 2^n}$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2 + n\sqrt{n}$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4^n - 6^n}{4^n + 6^n}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n - 2^n$

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{0{,}5^n - 0{,}2^n}{2^n + 1}$

Partie 4 :

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 2n$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^3 + 5n^2 + 6n - 1$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 3n^4 + 2n^2 - 5n + 2$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - 7n + 2)(n^3 - 8n + 1)$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6n^2 + 3n + 5}{-2n^2 + 5n - 1}$

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{9n^7 - 5n^4 + n}{n^2 + 1}$

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6n^2 + 4n - 2}{8n^3 + 7n^2 - 4n + 7}$

Exercice 5 (Théorèmes de comparaison)

Partie 1 :

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

a) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

c) Que peut-on dire sur la convergence de la suite (u_n).

Partie 2 :

On considère la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n - 4n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $u_n \leqslant -n^2$ pour tout $n \geqslant 5$.

2) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie 3 :

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3+3\sin(n)$
3) $\lim\limits_{n\to+\infty} -5n^4+2n^4\sin\left(\sqrt{n}\right)$
4) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4-n^3\cos\left(n^5\right)$
5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
6) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+\left(\sin\left(n^3\right)+\cos\left(n^2\right)\right)n$
7) $\lim\limits_{n\to+\infty} (3+(-1)^n)\,0{,}7^n$

Partie 4 :

Déterminer les limites suivantes à l'aide d'un théorème de comparaison :

1) $\lim_{n\to+\infty} \cos n+2n$ 2) $\lim_{n\to+\infty} 2\times\frac{(-1)^n}{3n}$ 3) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{3^n}$ 4) $\lim_{n\to+\infty} -5n^2+(-1)^n$

5) Soit la suite (u_n) telle que $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3n+1$ et $u_0=2$. De plus, on sait que $u_n>3n^2+1$ pour n > 3

a) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 6 (Récurrence)

Partie 1 :

Démontrer par récurrence :

Une majoration ou minoration :

1) Soit la suite u telle que $u_{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n$ et $u_1=\frac{1}{2}$, Prouver que $u_n\geq 0$ pour tout n différent de 0

2) Soit la suite u telle que $u_{n+1}=3u_n-2n+3$ et $u_0=0$, Prouver que $u_n\geq n$ pour tout n.

3) Soit la suite u telle que $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$ et $u_0=0$, Prouver que $u_n\leq 2$ pour tout n.

4) Soit la suite u telle que $u_{n+1}=2+\frac{1}{u_n}$ et $u_0=3$, Prouver que $2\leq u_n\leq 3$ pour tout n.

Un sens de variation :

5) Soit la suite (u_n) telle que $u_{n+1}=\frac{5u_n-1}{u_n+2}$ et $u_0=2$

a) Démontrer que $u_n>2$ pour tout entier naturel.

b) Etudier le sens de variation de la fonction suivante (définie sur]-2 ;+∞ [)

c) Etudier les variations de la suite (u_n)

Une formule explicite :

6) Soit la suite u telle que $u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}u_n$ et $u_0=0$, Prouver que $u_n=\frac{n}{n+1}$ pour tout n.

7) Soit la suite u telle que $u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+3$ et $u_0=0$, Prouver que $u_n=5(1-(\frac{2}{5})^n)$ pour tout n.

Autre :

8) Pour tout entier n > 3, on a $2^n\geq n^2$

9) Pour tout entier n différent de 0, $S=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

10) Pour tout entier n différent de 0, $S=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$

11) Pour tout entier n différent de 0, $S=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

12) Pour tout entier n différent de 0, $3^n\geq 1+2n$

13) n^3-n est divisible par 3 pour tout entier n.

14) 4^n-1-3n est un multiple de 9 pour tout entier n.

15) $5^n>3^n+4^n$ pour tout n > 3

Partie 2 :

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on définit $n!$ qui se lit « n factorielle » ou « factorielle n » par :

$1!=1\,;2!=1\times 2=2\,;3!=1\times 2\times 3=6\,;$ etc.

1) Calculer 6!.
2) Montrer par récurrence que $3^n\leqslant n!$ pour tout $n\geqslant 7$.
3) Montrer que $n!\leqslant n^n$ pour tout $n\geqslant 1$.

Exercice 7 (synthèse)

Partie 1 :

La suite (u_n) est définie par : $u_0=0$ et $u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$

Partie A : première méthode

1) a) Démontrer par récurrence que pour tout n, $0\leqslant u_n<1$

b) Vérifier que $u_{n+1}-u_n=\frac{1-u_n^2}{u_n+2}$ puis montrer que la suite (u_n) est alors croissante.

2) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ

3) On admet que cette limite ℓ vérifie $f(\ell)=\ell$ avec f définie sur [0; 1] par $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$

a) Déterminer la valeur de ℓ

b) Proposer un algorithme pour déterminer la valeur de N tel que : $\forall n>N$, $|u_n-\ell|<10^{-3}$.
Entrer cet algorithme sur votre calculatrice puis déterminer N.

Partie B : deuxième méthode

1) La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

2) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Partie 2 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

4. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.

   b. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

   c. Déterminer la valeur de la limite ℓ.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = f(v_n).$$

1. On donne en **Annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.

   Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3 sur l'**annexe, à rendre avec la copie**.

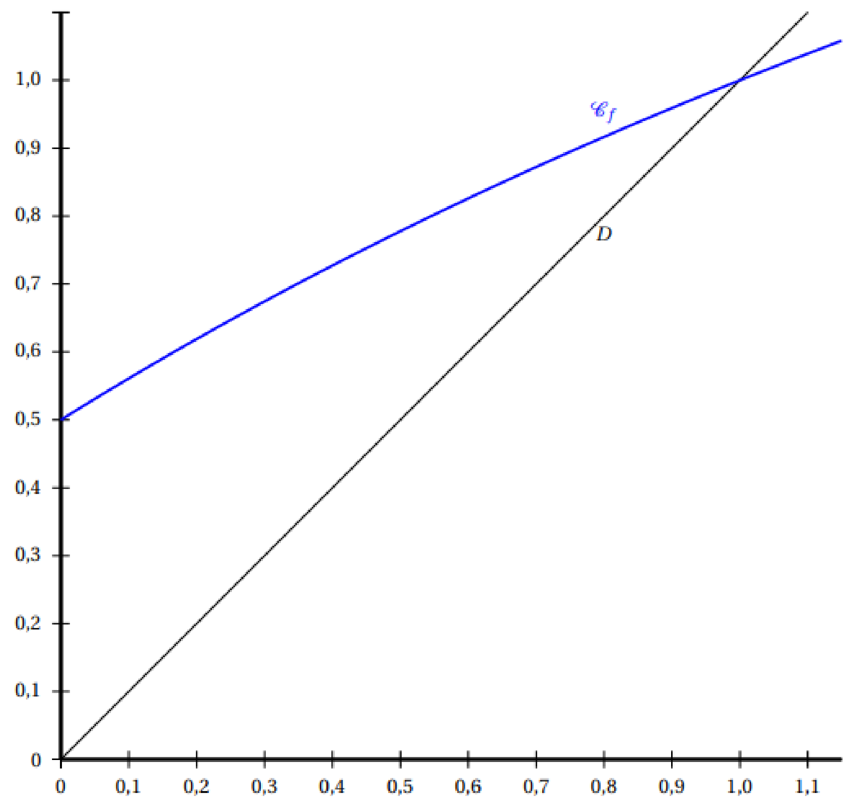
   Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, $1 - v_{n+1} = \left(\dfrac{2}{4+v_n}\right)(1 - v_n)$.

   b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

3. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

À rendre avec la copie



Partie 3 :

Un lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries, notées A, B et C, dans chacune desquelles il est confronté à un stimulus particulier.
À chaque fois qu'il est soumis à un stimulus, le lapin reste dans la galerie où il se trouve ou change de galerie. Cela constitue une étape.

Soit n un entier naturel.
On note a_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie A à l'étape n ». On note b_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie B à l'étape n ». On note c_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie C à l'étape n ».
À l'étape $n = 0$, le lapin est dans la galerie A.
Une étude antérieure des réactions du lapin face aux différents stimuli permet de modéliser ses déplacements par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} & = & \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{array}\right.$$

L'objectif de cet exercice est d'estimer dans quelle galerie le lapin a la plus grande probabilité de se trouver à long terme.

Partie A

À l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs suivant :

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	1	0	0
3	1	0,333	0,667	0
4	2	0,278	0,556	0,167
5	3	0,231	0,574	0,194
6	4	0,221	0,571	0,208
7	5	0,216	0,572	0,212
8	6	0,215	0,571	0,214
9	7	0,215	0,571	0,214
10	8	0,214	0,571	0,214
11	9	0,214	0,571	0,214
12	10	0,214	0,571	0,214

1. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 et recopier vers le bas pour remplir la colonne C?
2. Quelle conjecture peut-on émettre?

Partie B

1. On définit la suite (u_n), pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - c_n$.
   - **a.** Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison.
   - **b.** Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = b_n - \frac{4}{7}$ pour tout entier naturel n.
   - **a.** Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et en déduire que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{6}v_n$.
   - **b.** En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n, \quad b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{et} \quad c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

4. Que peut-on en déduire sur la position du lapin après un très grand nombre d'étapes?

Partie 4 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}.$$

Soit a un réel positif.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, suivant différentes valeurs de son premier terme $u_0 = a$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, pour $a = 2,9$ puis pour $a = 3,1$.
2. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
   - **a.** En remarquant que $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2}$, montrer que $\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$.
   - **b.** Montrer que les valeurs possibles de ℓ sont 1 et 3.
3. Dans cette question, on prend $a = 2,9$.
   - **a.** Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.
   - **b.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   - **c.** Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Dans cette question, on prend $a = 3,1$ et on admet que la suite (u_n) est croissante.
   - **a.** À l'aide des questions précédentes montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
   - **b.** En déduire le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

c. L'algorithme suivant calcule le plus petit rang p pour lequel $u_p > 10^6$.
Recopier et compléter cet algorithme.
P est un nombre entier et U est un nombre réel.

```
def seuil()
p=....
U=....
while .....:
    p=....
    U=....
return(...)
```

Partie 5 :

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1520$.
   b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c. Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1520$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que ...
    n ← ...
    u ← ...
Fin de Tant que
```

La notation « ← » correspond à une affectation de valeur, ainsi « $n \leftarrow 0$ » signifie « Affecter à n la valeur 0 ».

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

Partie 6 :

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?
2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	13	24 587	8 192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.
2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{n}$.

   Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

<u>Exercice 8 (algorithmes)</u>

<u>Partie 1 :</u>

On considère la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n - 2}{3\,v_n - 4} \end{cases}$$

$v \leftarrow$ …
Pour i variant de … à … Faire
| …
Fin Pour

1) Compléter l'algorithme ci-dessus afin qu'il affiche le terme de rang N.
2) Ecrire en langage Python l'algorithme
3) L'utiliser pour afficher v_{50}

<u>Partie2 :</u> Soit la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 6$

A quoi sert la fonction Python ci-dessous ?

```python
def calcul(n):
    L=[]
    L.append(6)
    for i in range(1,n+1):
        L.append(1/3*L[i-1]+2)
    return(L)
```

<u>Partie 3 :</u>

1) Ecrire en langage python une fonction affichant les n premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et $u_0 = 4$

2) Ecrire un algorithme affichant u_n avec n fixé par l'utilisateur avec (u_n) définie par $u_{n+1} = 3u_n + n - 4$ et $u_0 = 1$

<u>Partie 4 :</u>

1) Soit la suite $u_n = \frac{1}{2^n}$. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
S←…
Pour i allant de …. à….
        u←…..
        S←….
FinPour.
```

Compléter l'algorithme afin qu'il affiche la valeur de la somme S, des N premiers termes de la suite (u_n).

<u>Partie 5 :</u>

Soit la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 6$

A quoi sert la fonction Python ci-dessous ?

```python
def somme(n):
    u=6
    S=u
    for i in range(n):
        u=1/3*u+2
        S=u+S
    return(S)
```

<u>Partie 6 :</u>

Ecrire un programme Python qui calcule la somme des N premiers termes de la suite (v_n) définie par $v_{n+1} = 2v_n+5$ et $v_0 = 2$.

Partie 7 :

Soit la suite $u_{n+1}=5/3u_n$ et $u_0 = 1$

$u \leftarrow 1$
$n \leftarrow 0$
Tant que $u < 1000$
  $n \leftarrow n+1$
  $u \leftarrow u \times \frac{5}{3}$
Fin tant que

1) Quel est le but de cet algorithme ?

2) Déterminer la valeur de n renvoyé par cet algorithme.

a) En programmant l'algorithme sur votre calculatrice

b) En complétant le tableau ci-dessous (en ajoutant des colonnes si nécessaire)

	Initialiation	Tour 1	Tour 2
u	1	…	…
n	0	…	…

Partie 8 :

Un couple fait un placement au taux annuel de 2 % dont les intérêts sont capitalisés tous les ans. Le couple a placé le montant de 1 000 euros à l'ouverture le 1er janvier 2010 puis, tous les ans à chaque 1er janvier, verse 2 400 euros.
On note u_n le capital présent sur le compte le 1er janvier 2010 + n après le versement annuel. On a donc $u_0 = 1000$ et on admet que pour tout entier n, la suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 1.02 \times u_n + 2400 \end{cases}$$

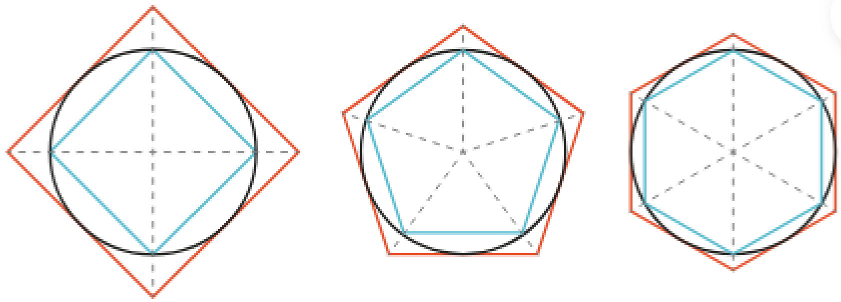
1) On chercher à déterminer l'année à partir de laquelle le couple aura plus de 18 000 euros sur son compte en banque. Compléter la fonction Python ci-dessous pour répondre à cette question.

2) Ecrire en langage python permettant de déterminer la valeur de n à partir de laquelle $v_n \leq 500$ avec $v_{n+1}=0,6v_n+100$ et $v_0 = 10000$

Partie 9 :

π est le périmètre d'un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre 1. Vers 250 av. J.-C., pour déterminer une valeur approchée de ce nombre, Archimède décida de considérer des polygones réguliers ayant le même nombre de côtés, l'un étant inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ (en bleu) et l'autre lui étant circonscrit (rouge).

Pour tout $n \geqslant 3$, notons S_n le périmètre du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle et T_n le périmètre du polygone régulier à n côtés circonscrit à ce cercle. On peut alors montrer (voir « Pour aller plus loin ») que pour tout $n \geqslant 2$, on a les relations suivantes : $T_{2n} = \dfrac{2S_nT_n}{S_n + T_n}$ et $S_{2n} = \sqrt{S_nT_{2n}}$.



$n = 4$ $\quad$ $n = 5$ $\quad$ $n = 6$

Voici un algorithme permettant de calculer les valeurs successives des suites (T_{2^n}) et (S_{2^n}).

```python
from math import *

def archimede(n) :
    T = ...
    S = ...
    for k in range(n) :
        T = ...
        S = ...
    print("T =", T, "S =", S)
```

1. Compléter les lignes 4 et 5 de cet algorithme pour initialiser l'algorithme avec les valeurs T_4 et S_4.
2. Compléter les lignes 7 et 8 pour calculer les valeurs successives des suites (T_{2^n}) et (S_{2^n}).

3. Quelle valeur de n doit-on entrer pour obtenir les valeurs des périmètres des polygones à 2 048 côtés inscrit dans le cercle et circonscrit à celui-ci ? Quel encadrement de π obtient-on alors ?

Exercice 9 (synthèse)

Partie 1 :

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$u_n \leqslant n+3.$$
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n).$$
   c. En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = u_n - n$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n,
$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$
   a. Exprimer S_n en fonction de n.
   b. Déterminer la limite de la suite (T_n).

Partie 2 :

Soit a un nombre réel fixé non nul.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\quad u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :
$$g(x) = e^{2x} - e^x - x.$$
   a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.
   b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
   c. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).
2. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.
   a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.
   b. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
   c. Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).
3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
   La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
   $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.
   L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

```
def seuil(M)
n=....
u=....
while .....:
    ...
return(n)
```

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.*

Exercice 10 (QCM)

Trouvez la bonne réponse parmi les questions suivantes

Question1 :

Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout n entier naturel non nul :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2n}u_n + 2n + 2.$$

On a alors :

a. $u_{n+2} = \frac{1}{4n(n+1)}u_n + 2n + 5$
b. $u_{n+2} = \frac{1}{4n(n+1)}u_n + 2n + 6$
c. $u_{n+2} = \frac{1}{4n^2}u_n + 2n + 7$
d. $u_{n+2} = \frac{1}{4n^2}u_n + 2n + 6$

Question2 :

Soit (u_n) la suite à valeurs strictement positives définies sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1}.$$

On définit également la suite (v_n) par pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}.$$

La suite (v_n) est :

a. géométrique de raison 2;
b. géométrique de raison $\frac{1}{2}$;
c. arithmétique de raison -1;
d. arithmétique de raison 2.

Question3 :

Question 11 : On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{(-1)^n \mathrm{E}\left(\frac{n}{3}\right)}{n^2 + n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x, alors

a. (u_n) n'est ni minorée, ni majorée.
b. (u_n) est minorée mais pas majorée.
c. (u_n) est majorée mais pas minorée.
d. (u_n) est bornée.

Question 4 :

Question 3 : On considère une suite (u_n) strictement croissante de premier terme $u_0 = 2$ et la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{-2}{1 - 3u_n}$.

Alors la suite (v_n) est :

a. monotone et croissante.

b. monotone et décroissante.

c. non monotone

d. Aucune des 3 réponses précédentes n'est exacte.

Question 5 :

(U_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}*$ par $U_n = 5 - \frac{10}{n}$,

(V_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}*$ par $V_n = 6 + \frac{3}{n}$,

et (W_n) une suite telle que pour tout n de $\mathbb{N}*$: $U_n < W_n < V_n$.

La suite (W_n) est forcément :

a. convergente
b. divergente vers $-\infty$ ou $+\infty$
c. divergente sans limite
d. Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

Exercice 11 (Vrai/faux)

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier

Partie 1 :

1. On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n, par $p_n = n^2 - 42n + 4$.

   Affirmation 1 : La suite (p_n) est strictement décroissante.

2. Soit a un nombre réel. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
   - $U_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$;
   - $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

   Affirmation 2 : La suite (v_n) est une suite géométrique.

3. On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n, $n^2 \leqslant (n+1)^2 w_n \leqslant n^2 + n$.

   Affirmation 3 : La suite (w_n) converge.

Partie 2 :

1. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 6 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1.$$

   Affirmation 1 : Pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4$.

2. Soit (t_n) une suite géométrique de premier terme $t_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{4}$.
   On appelle S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (t_n), soit $S_n = t_0 + t_1 + \ldots + t_n$.
   Affirmation 2 : La suite (S_n) a pour limite $+\infty$.

3. On définit la suite (c_n), pour tout entier naturel n non nul, par

$$c_n = 1 + \frac{\cos(n)}{n}.$$

   Affirmation 3 : La suite (c_n) est convergente.

Exercice 12 (Approfondissement)

Suites adjacentes :

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.

   b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

   Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

2. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

   b. Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

   c. En déduire que tes suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

   En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

Récurrence d'ordre 2 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_1 = 6$ pour tout entier naturel par :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$$

1) Calculer u_2 et u_3

2) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n)

3) Démontrer la conjecture.

Méthode de Héron :

On sait depuis la classe de seconde que le nombre $\sqrt{m}$ est un nombre irrationnel pour certaines valeurs de m strictement positives. C'est le cas par exemple de $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{5}$.

La méthode de Héron permet de calculer une valeur approchée de $\sqrt{m}$ avec une précision assez élevée et en peu d'opérations.

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'algorithme de Héron suivant.

Étape 1 : $x_0 = m$ et $x_1 = \dfrac{x_0 + \dfrac{m}{x_0}}{2}$

Étape 2 : $x_2 = \dfrac{x_1 + \dfrac{m}{x_1}}{2}$

Étape 3 : $x_3 = \dfrac{x_2 + \dfrac{m}{x_2}}{2}$

...

Étape n : $x_n = \dfrac{x_{n-1} + \dfrac{m}{x_{n-1}}}{2}$

1. Compléter l'algorithme suivant afin d'obtenir l'affichage de x_n pour n et m donnés.

```
Fonction Heron(m, n)
   X ← m
      Pour k allant de ... à ...
         X ← ...
      Fin Pour
   Retourner X
Fin Fonction
```

2. a. Expliquer les lignes de cet algorithme.

b. Modifier cet algorithme pour que l'ensemble des valeurs x_k pour k allant de 1 à n soient affichées.

3. a. Programmer cet algorithme avec Python et le tester pour $m = 2$ et $n = 4$.

b. Qu'observe-t-on sur les différentes valeurs affichées ?

c. En déduire une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

4. a. En utilisant cet algorithme, déterminer une valeur approchée de $\sqrt{5}$.

b. En déduire des approximations des solutions de $-2(x+3)^2 + 10 = 0$.