METHODES A CONNAITRE – SUITES NUMERIQUES

Problème A : Démontrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée
Questions-types : - *Démontrer que* $u_n \leq 3$ - *Démontrer que* (u_n) *est bornée (ou majorée, minorée)* - *Démontrer que* $2 < u_n \leq 4$
Procédure : Si la suite u est croissante alors elle est minorée par son premier terme. Si la suite u est décroissante alors elle est majorée par son premier terme. Si on ne nous donne pas de majorant (ou minorant), on peut calculer quelques termes ou tracer la représentation graphique de la suite pour conjecturer le minorant et majorant. Pour prouver $u_n \leq M$ (ou $u_n \geq m$) - Si $u_n = f(n)$ alors il faut démontrer que $u_n - M \leq 0$ (ou $u_n - m \geq 0$) - Si $u_{n+1} = f(u_n)$ alors on démontre par récurrence que $u_n \leq M$ (ou $u_n \geq m$)
Exemples : Soit la suite $u_n = \frac{3n+1}{n+1}$. Démontrer que (u_n) est bornée. On sait que (u_n) est croissante (→*voir problème C pour voir comment le prouver*). Par conséquent, la suite est minorée par son premier terme à savoir $m = u_0 = \frac{3\times0+1}{0+1} = 1$ A l'aide de la calculatrice, on émet l'hypothèse que $u_n \leq 3$. En effet, $u_{99} \approx 2{,}98 < 3$ et $u_{200} \approx 2{,}99 < 3$ On étudie donc le signe de $u_n - 3 = \frac{3n+1}{n+1} - 3 = \frac{3n+1-3(n+1)}{n+1} = \frac{-2}{n+1} < 0$ pour tout n entier naturel Donc on a bien $u_n \leq 3$ par conséquent $1 \leq u_n \leq 3$ pour tout n donc (u_n) est bornée Soit la suite $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ et $u_0 = 0$. Démontrer que $u_n \leq 2$ pour tout n entier naturel On cherche à prouver par récurrence que pour tout n entier naturel on a $u_n \leq 2$ Initialisation : $u_0 = 0 \leq 2$ donc la propriété est vraie au rang n = 0. Hérédité : On suppose qu'au rang p, on $u_p \leq 2$ On cherche à prouver qu'au rang p + 1, on a $u_{p+1} \leq 2$ On sait d'après l'hypothèse que $u_p \leq 2 \leftrightarrow u_p + 1 \leq 2 + 1 \leftrightarrow \sqrt{u_p + 1} \leq \sqrt{3} < 2$ donc $u_{P+1} \leq 2$ La propriété est vraie au rang p + 1 →*Pour démontrer l'hérédité, on cherche à obtenir* u_{p+1} *à l'aide de la relation de récurrence à partir de* u_p On peut donc dire que pour tout n entier naturel on a $u_n \leq 2$
A vous de jouer : 1) Démontrer que $u_n = \frac{7n-4}{n-2}$ est bornée. 2) Démontrer que $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ et $u_0 = -1$ est bornée.

Problème B : Démontrer qu'une suite croissante (ou décroissante) et majorée (ou minorée) converge
Questions-types : - *Démontrer que la suite* (u_n) *converge* *En général, il faut bien identifier que l'on ne demande pas la limite de la suite mais on demande simplement de prouver qu'elle admet une limite finie (sans la trouver)*
Procédure : Quand la suite est définie de façon explicite, on utilise le tableau des opérations sur les limites Sinon on utilise une des deux propriétés : - Si la suite u est croissante et majorée alors elle converge. - Si la suite u est décroissante alors elle est majorée par son premier terme.
Exemples : Soit la suite $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ et $u_0 = 0$. On sait que $u_n \leq 2$ pour tout n entier naturel et que (u_n) est croissante. Démontrer que (u_n) converge La suite (u_n) est croissante et majorée donc elle converge. → *Dans le cadre d'un problème on aura souvent déjà prouvée que* (u_n) *est croissante et majorée par 2 donc il n'y a plus rien à faire à part énoncer*

la propriété. Dans le cadre d'un problème ouvert, on peut être amené à démontrer le sens de variation et la majoration. Dans ce cas, il faut penser à calculer quelques termes pour conjecturer la limite, le sens de variation et le majorant/minorant de la suite afin de savoir quoi démontrer ! (voir Problème C et L)

A vous de jouer :

1) Démontrer que $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ et $u_0 = -1$ est convergente

Problème C : Déterminer la limite d'une suite définie de façon explicite $u_n = f(n)$

Questions-types : - Déterminer la limite de la suite (u_n)

- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n + 1$

Procédure :

On utilise le tableau des opérations sur les limites en décomposant la suite en quotient, produit ou somme de puissances de n.

Dans les cas suivants : $\infty \times 0$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$ et $+\infty - \infty$ on ne peut pas déterminer la limite on a une forme indéterminée (on verra dans les prochains problèmes comment résoudre ces cas)

Exemples :

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 + 2n + 5$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n + 5 = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 + 2n + 5 = +\infty$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + 2 = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+2} = 0$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (-3n^3 + 1) \times n^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^3 + 1 = -\infty$ et donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} (-3n^3 + 1) \times n^2 = -\infty$

→ *Il faut au minimum se rappeler des formes indéterminées. Si on hésite sur les autres résultats, on peut remplacer n par 10^9 dans l'expression de la suite pour trouver la limite. (Ne surtout pas faire ça pour une forme indéterminée). Ex :* $\left(-3 \times {10^9}^3 + 1\right) \times {10^9}^2 \approx -3 \times 10^{45}$ *soit un nombre négatif très grand en valeur absolue.*

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n-4} + 4n - 2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n - 4 = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n-4} = 0$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n - 2 = +\infty$ donc par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n-4} + 4n - 2 = +\infty$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - n + 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} -n + 1 = -\infty$ et donc on a une forme indéterminée ! On ne peut donc pas conclure (voir les problèmes suivants pour la résolution).

A vous de jouer : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-3}{n^2+2} - n + 1$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^5 + 2n^2 + n - 6$ 3) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^3 - n + 1$

Problème D : Limite d'un polynôme (forme indéterminée)

Questions-types : - Déterminer la limite de la suite (u_n)

- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 - 2n + 1$

Procédure :

Lorsque dans un polynôme, un signe ' – ' est présent devant une des puissances de n, on a une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, il faut factoriser par la le terme de plus haut degré et ensuite calculer la limite en utilisant les opérations sur les limites.

Exemples :

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 - 2n + 5$

→ *Il y a un ' – ' devant 2n donc la limite ne pourra pas être déterminé directement. On factorise donc par le terme de plus haut degré, ici n².*

$4n^2 - 2n + 5 = n^2(4 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2})$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (4 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}) = 4$ donc par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(4 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = +\infty$

<u>A vous de jouer :</u> Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^3 - 3n^2 + n - 5$

Problème E : Limite d'un quotient de polynômes

<u>*Questions-types :*</u> *- Déterminer la limite de la suite (u_n)*

- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2-2n+1}{n^3+2}$

<u>Procédure :</u>

La limite d'un quotient est obligatoirement indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Pour lever l'indétermination, il faut factoriser les numérateurs et dénominateurs par leur terme prépondérant respectif. On simplifie les facteurs et on calcule la limite de l'expression ainsi calculée.

<u>Exemples :</u>

<u>Calculer</u> $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n^2-2n+5}{2n^3-5}$

→ *On factorise le numérateur par n² et le dénominateur par n^3*

$\frac{4n^2-2n+5}{2n^3-5} = \frac{\cancel{n^2}(4-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2})}{n^{\cancel{3}}(2-\frac{5}{n^3})} = \frac{(4-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2})}{n(2-\frac{5}{n^3})}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (2 - \frac{5}{n^3}) = 2$ donc par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n(2 - \frac{5}{n^3}) = +\infty$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} (4 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}) = 4$ donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(4-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2})}{n(2-\frac{5}{n^3})} = 0$

<u>A vous de jouer :</u> Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n^4+3n^2+1}{5n^4+2n-3}$

Problème F : Limite de la forme q^n

<u>*Questions-types :*</u> *- Déterminer la limite de la suite (u_n) (avec (u_n) une suite géométrique par ex.)*

- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n$

<u>Procédure :</u>

Selon la valeur de q, il y a plusieurs possibilités :

Pour $-1 < q < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

Pour $q > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Pour $q \leq -1$, il n'y a pas de limite

Pour $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$

On peut ensuite utiliser les opérations sur les limites si l'expression comporte d'autres termes.

<u>Exemples :</u>

<u>Calculer</u> $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ car $3 > 1$

<u>Calculer</u> $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{2})^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

<u>Calculer</u> $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2)^n$

On ne peut pas savoir car $-2 < -1$

<u>Calculer</u> $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n + 3n - 4$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n - 4 = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n + 3n - 4 = +\infty$

<u>A vous de jouer :</u> Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n + 2n - 6$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(\frac{1}{5})^n+6}{3n^2+1}$

Problème G: Indétermination de la forme q^n
<u>Questions-types :</u> *- Déterminer la limite de la suite* (u_n) *- Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n - 2^n$
<u>Procédure :</u> Lorsque l'on a une indétermination $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\infty - \infty$, on factorise par la puissance dont la base est la plus grande. On simplifie en utilisant les règles sur les puissances. On applique ensuite la procédure du problème P
<u>Exemples :</u> <u>Calculer</u> $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n - 2^n$ $3^n - 2^n = 3^n\left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right) = 3^n(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ (car 3 > 1) et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$ (car $-1 < \frac{2}{3} < 1$) Par conséquent, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = +\infty$ <u>Calculer</u> $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7^n-5^n}{6^n-3^n}$ $\frac{7^n - 5^n}{6^n - 3^n} = \frac{7^n(1 - \frac{5^n}{7^n})}{6^n(1 - \frac{3^n}{6^n})} = (\frac{7}{6})^n \times \frac{(1 - \left(\frac{5}{7}\right)^n)}{(1 - \left(\frac{3}{6}\right)^n)}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \left(\frac{5}{7}\right)^n) = 1$ (car $-1 < \frac{5}{7} < 1$) et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \left(\frac{3}{6}\right)^n) = 1$ (car $-1 < \frac{3}{6} < 1$) Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(1-\left(\frac{5}{7}\right)^n)}{(1-\left(\frac{3}{6}\right)^n)} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^n = +\infty$ (car $\frac{7}{6} > 1$) Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{7}{6})^n \times \frac{(1-\left(\frac{5}{7}\right)^n)}{(1-\left(\frac{3}{6}\right)^n)} = +\infty$
<u>A vous de jouer :</u> Calculer les limites suivantes : 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n - 8^n$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5^n-3^n}{2^n-8^n}$

Problème H : Limite d'un cosinus, sinus et $(-1)^n$
<u>Questions-types :</u> *- Déterminer la limite de la suite* (u_n) *- Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos(3n)}{\mathrm{n}}$
<u>Procédure :</u> Il faut utiliser les théorèmes de comparaison pour déterminer ces limites. En partant des inégalités suivantes, on reconstitue la suite étudiée : $-1 \le \cos(f(n)) \le 1$ quelque soit la valeur de f(n) $-1 \le \sin(f(n)) \le 1$ quelque soit la valeur de f(n) $-1 \le (-1)^{\mathrm{n}} \le 1$ quelque soit la valeur de n
<u>Exemples :</u> <u>Calculer</u> $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(3n) + n$ On sait que $-1 \le \cos(3n) \le 1$ par conséquent $-1 + n \le \cos(3n) + n$ Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} -1 + n = +\infty$ donc par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(3n) + n = +\infty$ <u>Calculer</u> $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{3\mathrm{n}+4}$

On sait que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ par conséquent $\frac{-1}{3n+4} \leq \frac{(-1)^n}{3n+4} \leq \frac{1}{3n+4}$ On ne change pas l'ordre car 3n+4 > 0

$\lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{3n+4} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3n+4} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{3n+4} = 0$

A vous de jouer : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\sin(3n)}$ 2) $\lim_{n \to +\infty} \frac{3n+2-(-1)^n}{4n+1}$

Problème I : Limite indéterminée d'une racine carrée

Questions-types : - Déterminer la limite de la suite (u_n)

- Calculer $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{3n-1} - \sqrt{3n+2}$

Procédure :

Pour lever l'indétermination d'une différence de deux racines, on multiplie et divise par l'expression conjuguée (de l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$).

On calcule ensuite la limite de l'expression.

Exemples :

Calculer $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{3n-1} - \sqrt{3n+2}$

→ *L'expression conjuguée de* $\sqrt{3n-1} - \sqrt{3n+2}$ *est* $\sqrt{3n-1} + \sqrt{3n+2}$

$\frac{(\sqrt{3n-1}-\sqrt{3n+2})\times(\sqrt{3n-1}+\sqrt{3n+2})}{(\sqrt{3n-1}+\sqrt{3n+2})} = \frac{3n-1-(3n+2)}{(\sqrt{3n-1}+\sqrt{3n+2})} = \frac{-3}{(\sqrt{3n-1}+\sqrt{3n+2})}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{-3}{(\sqrt{3n-1}+\sqrt{3n+2})} = 0$

A vous de jouer : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{4n-2} - \sqrt{4n+3}$

Problème J : Limite par comparaison d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Questions-types : a) Démontrer que, pour tout n appartenant à n, $u_n \geq 2n+1$ *(question préalable)*

b) En déduire, la limite de la suite (u_n)

Procédure :

Dans l'exercice, on aura prouvé au préalable une inégalité concernant u_n (par récurrence)

On utilise ensuite un théorème de comparaison.

Exemples :

Soit la suite (u_n) telle que pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$ et $u_0 = 1$

a) Démontrer que $u_n \geq n - 2$ pour tout n ≥ 4→*On ne fera pas cette partie (voir problème L)*

a) Déterminer la limite de u_n

$\lim_{n \to +\infty} n - 2 = +\infty$ donc par comparaison : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

A vous de jouer : Soit la suite (u_n) telle que pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$ et $u_0 = 1$

a) Démontrer que $u_n \geq n - 3$ pour tout n ≥ 5

b) Déterminer la limite de u_n

Problème K: Raisonnement par récurrence

Questions-types : En général, il faut avoir une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

- Démontrer que, pour tout n appartenant à n, $u_n \geq 2n+1$

- Démontrer que, pour tout n appartenant à n, $u_n \geq 3$

- Déterminer le sens de variation de $(u_n)c$

- Démontrer que pour tout n, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Procédure :

Pour d'autres exemples (sens de variation, inégalité) voir problèmes C et L

- Dans un premier temps, on vérifie que la propriété (égalité ou inégalité) est vraie pour la plus petite valeur

que peut prendre n. Cette phase s'appelle l'initialisation.
- Par la suite, on démontre, l'hérédité : Pour cela, on suppose que pour un rang p fixé, la propriété vraie. On cherche alors à prouver que la propriété sera alors vraie au rang p+1.
- Enfin, on conclue avec une phrase.

Exemples :

- Démontrer que pour tout n, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

On cherche à prouver que pour tout n entier naturel, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation : Pour n = 1, $\frac{1\times(1+1)}{2} = 1$ donc l'égalité est vraie au rang n = 1.

Hérédité : On suppose qu'au rang p fixé, $1 + 2 + 3 + \cdots + p = \frac{p(p+1)}{2}$

On cherche à prouver qu'au rang p+1 fixé, $1 + 2 + 3 + \cdots + p + 1 = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$

On sait d'après l'hypothèse de récurrence que $1 + 2 + 3 + \cdots + p = \frac{p(p+1)}{2}$ donc

→ *Pour démontrer l'hérédité, on part toujours de l'hypothèse de récurrence. On modifie ensuite un des deux cotés de l'égalité de façon à retrouver exactement ce que l'on cherche au rang p+1. Dans cas d'une somme comme celle-ci, il est préférable de prendre le coté 1+2+…+p car en ajoutant p+1 on passe facilement au rang p+1. Il faut ensuite développer (ou factoriser si on est fort) l'expression de l'autre coté de l'égalité pour retrouver l'expression voulue au rang p +1*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + p + (p+1) = \frac{p(p+1)}{2} + p + 1 = \frac{p(p+1) + 2(p+1)}{2} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

Donc l'égalité est vraie au rang p+1. D'après le raisonnement par récurrence, on peut dire que pour tout n entier naturel, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- Démontrer que pour tout n, $3^n \geq 2n + 1$

On cherche à prouver que pour tout n entier naturel, $3^n \geq 2n + 1$

Initialisation : Pour n = 0, $3^0 = 1$ et $2 \times 0 + 1 = 1$ donc l'inégalité est vraie au rang n = 0.

Hérédité : On suppose qu'au rang p fixé, $3^p \geq 2p + 1$

On cherche à prouver qu'au rang p+1 fixé, $3^{p+1} \geq 2(p+1) + 1$ soit $3^{p+1} \geq 2p + 3$

On sait d'après l'hypothèse de récurrence que $3^p \geq 2p + 1$ donc

→ *Pour démontrer l'hérédité, on part toujours de l'hypothèse de récurrence. On modifie ensuite un des deux cotés de l'inégalité de façon à retrouver exactement ce que l'on cherche au rang p+1. Dans cas d'une puissance comme celle-ci, il est préférable de prendre le coté* 3^p *car en multipliant par 3 on passe facilement au rang p+1. Il faut ensuite développer (ou factoriser si on est fort) l'expression de l'autre coté de l'inégalité pour retrouver l'expression voulue au rang p +1 ou une inégalité plus restrictive. En effet, pour une inégalité, on n'arrive pas toujours à retrouver exactement les même expressions que celles attendues.*

$3^p \geq 2p + 1 \leftrightarrow 3 \times 3^p \geq 3 \times (2p+1) \leftrightarrow 3^{p+1} \geq 6p + 3 \geq 2p + 3$ car $p \geq 0$

→ *Ici par exemple, on ne trouve pas l'inégalité voulue mais une inégalité plus restrictive donc on peut quand même conclure.*

$3^{p+1} \geq 2p + 3$ donc l'inégalité est vraie au rang p+1.

D'après le raisonnement par récurrence, on peut dire que pour tout n entier naturel, $3^n \geq 2n + 1$

A vous de jouer : Démontrer par récurrence :

a) Démontrer que pour tout n entier naturel, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) Démontrer que pour tout n entier naturel, $4^n \geq 3n + 1$