CONCENTRATION ET LOIS DES GRANDS NOMBRES – EXERCICES

Exercice 1 (Utilisation de Bienaymé-Tchébychev) :

Partie 1 :

La consommation d'eau quotidienne en litres d'une ou un français pris au hasard dans la population est donnée par une variable aléatoire C telle que $\mathrm{E}(C) = 150$ et $\mathrm{V}(C) = 900$.

1) Justifier qu'au moins 75 % de la population française consomme entre 90 et 210 litres d'eau par jour.
2) Est-il vrai de dire « la probabilité que l'écart entre C et 150 soit strictement inférieur à 90 litres est supérieure à 0,85 ».

Partie 2 :

Une lanceuse de fléchettes met dans « le mille » 60 % du temps et on suppose que tous ses lancers sont indépendants.

1) Quelle loi suit la variable X donnant le nombre de lancers dans « le mille » sur 20 tentatives ?
2) a) Quand on lui demande combien elle pense mettre de lancers dans le mille, elle répond « moins de 16 mais plus de 8 ».

   En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donner une minoration de la probabilité qu'elle ait raison.

   b) Calculer $p(8 < X < 16)$ en utilisant la loi binomiale puis discuter la minoration obtenue à la question 2.a).

Partie 3 :

Dans un avion, une personne est autorisée à mettre en soute un bagage de 23 kg ou moins, sans pénalité.
Une compagnie aérienne a compilé la masse de tous les bagages enregistrés sur une année et a constaté que la masse d'un bagage est donnée en kg par une variable aléatoire X d'espérance 22 et d'écart-type 0,4.

1) Sur un avion de 500 passagers supposés indépendants, on appelle X_i la masse de bagage du passager i et M la variable aléatoire donnant la moyenne des masses des bagages des 500 passagers.

   a) Exprimer M en fonction des X_i.

   b) Minorer la probabilité que $M \in]21,5\,;\,22,5[$

2) Si la masse totale de bagages est inférieure ou égale à 10,5 tonnes alors l'avion embarque des bagages d'un autre vol et si la masse totale de bagages est supérieure ou égale à 11,5 tonnes alors une partie des bagages de l'avion est envoyée sur un autre vol.

   Majorer la probabilité que cet avion contienne des bagages d'un autre vol ou ne contienne pas les bagages de tous ses passagers.

Exercice 2 (Calculs de seuil) :

Partie 1 :

Amir distribue tous les jours des prospectus à la sortie du métro.
Les variables aléatoires X_i donnant le nombre de prospectus distribués le i-ième jour sont indépendantes et de même loi d'espérance 250 et de variance 100.

Au bout de combien de jours peut-il être sûr au risque de 5 % d'avoir distribué en moyenne entre 245 et 255 prospectus par jour ?

Partie 2 :

On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. On note M_n la proportion de piles obtenus.

Quelle doit-être la valeur minimale de n pour que la probabilité de l'événement $\left|\mathrm{M}_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant 0{,}01$ soit inférieure à 0,01 ?

Exercice 3 (Algorithmes) :

On considère une urne contenant dix boules, dont quatre sont rouges. On tire successivement et avec remise une boule de l'urne et on s'arrête dès que l'on obtient une première boule rouge.
L'objectif est de conjecturer l'espérance de cette loi à l'aide d'un programme informatique.

1. Expliquer l'utilisation d'une boucle while

2. Compléter le programme suivant dont l'objectif est de simuler l'expérience.

```
from random import randint

def rang(n):
    S = 0
    for i in range(n):
        X = randint (1, 10)
        C = 1
        while X <= ...:
            X = randint (1, 10)
            C = ...
        S = S + C
    return...
```

3. Quel est le rôle de la variable S ?

4. Tester le programme pour différentes grandes valeurs de n. Quelle semble être l'espérance de cette loi ? Justifier en citant le théorème utilisé.

Exercice 4 (synthèse) :

On prend un dé tétraédrique bien équilibré dont on a déterminé au paragraphe 1.2 l'espérance $\mu = 2,5$ et la variance $V = 1,25$.

Combien de lancers du dé tétraédrique doit-on faire pour s'assurer au seuil de 95 % que la moyenne des résultats des lancers est dans l'intervalle $]2,45\ ;\ 2,55[$.

2) Compléter la fonction python simul ci-dessous afin qu'elle renvoie la moyenne des résultats des n lancers de la question précédente.

```
from random import*
def simul():
    s=
    for i in range(     ):
        s=s+randint(1,4)
    return
```

3) En utilisant le programme 4 fois on a trouvé les résultats suivants :

2,4978 , 2,5073 , 2,4987 , 2,5149

Que pensez vous de l'inégalité de Bienaymé Tchébichev ?

Exercice 5 (QCM) :

Question 1 :

Sur un vol de 325 voyageurs, une compagnie aérienne décide d'attribuer 340 billets.

Elle perd de l'argent pour un nombre strictement inférieur à 317 passagers et ne peut pas trouver un autre vol aux personnes en surréservation pour un nombre strictement supérieur à 329 passagers.

On donne $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 323$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = 16{,}15$ où X compte le nombre de passagers effectivement présents. Que peut-on dire de la probabilité que la compagnie ne perde pas d'argent et qu'elle trouve un vol à tout le monde ?

- **a.** Elle est supérieure à $0{,}65$.
- **b.** Elle est inférieure à $0{,}45$.
- **c.** Elle est supérieure à $0{,}75$.
- **d.** Elle est inférieure à $0{,}55$.

Question 2 :

On lance n fois un dé équilibré à six faces et on note le nombre de fois où on obtient la face numéro 4. Combien de lancers faut-il effectuer au minimum pour que la probabilité de s'écarter de la moyenne d'au moins $0{,}1$ soit inférieure à $0{,}1$?

- **a.** 59
- **b.** 109
- **c.** 373
- **d.** 139

Question 3 :

La moyenne des notes des élèves d'un lycée est de $11{,}4$ et la variance de $1{,}2$. Sur une classe de 36 élèves, on peut dire que la probabilité que la moyenne de la classe soit dans l'intervalle $]9\ ;\ 13{,}8[$ est :

- **a.** Supérieure à $0{,}79$.
- **b.** Inférieure à $0{,}79$.
- **c.** Inférieure à $0{,}21$.
- **d.** Supérieure à $0{,}21$.