CONTINUITE - COURS

Définition : On dit que f est continue en a si f est définie sur un intervalle ouvert contenant a et que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Une fonction est continue sur un intervalle ssi elle est continue sur en chaque point de cet intervalle. Toutes les fonctions de référence (affines, polynômes, exponentielles, logarithmes, racines,…) sont continues sur leur ensemble de définition.

Le produit, la somme et le quotient de fonctions continues sur un intervalle I sont continues.

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f définie sur I et continue, a et b deux éléments de I tels que a < b, k un réel compris entre f(a) et f(b) alors il existe au moins un nombre c appartenant à [a ; b] tel que k = f(c).

Corollaire :

Si de plus, f est strictement monotone sur I, alors il existe un seul nombre c vérifiant f(c) = k.

Algorithmes :

Algorithme : Méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode qui permet de donner une solution approchée d'une équation de la forme $f(x) = 0$ que l'on ne peut pas résoudre sinon. On peut également résoudre une équation de la forme f(x) = g(x) en posant h(x) = f(x) – g(x) et en résolvant h(x) = 0.

Principe de la méthode : Si on cherche la solution de f(x) = 0 sur I, f doit être dérivable sur I.

- On choisit un point x_0 que l'on sait assez proche de la solution (estimation grossière)
- On utilise une approximation affine pour dire que $f(x) \approx f(x0) + f'(x0)(x - x0)$
- On résout $f(x) = 0$ avec l'approximation, soit $f(x0) + f'(x0)(x - x0) = 0$
- La solution de cette équation que l'on note x_1 s'approche de la solution recherchée

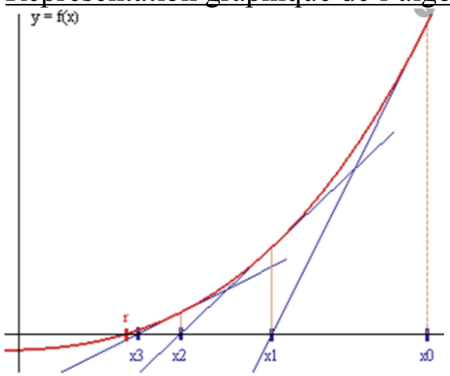
$$x1 = x0 - f(x0)/f'(x0)$$

- On réitère le processus avec x1,… Plus on fait d'itération, plus l'estimation de la solution est meilleure.
- De manière générale, pour passer de la kème itération à la k+1 ème, on a :

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$$

- On s'arrête lorsque l'on a obtenu une estimation suffisamment précise.

Représentation graphique de l'algorithme :



Limites de la méthode :

- Si on a aucune idée de la solution, le critère d'arrêt des itérations peut être compliqué à définir et peut amener à une solution très éloignés.
- En cas de non dérivation ponctuelle ou de problème d'ensemble de définition, on peut se retrouver avec une boucle infinie.

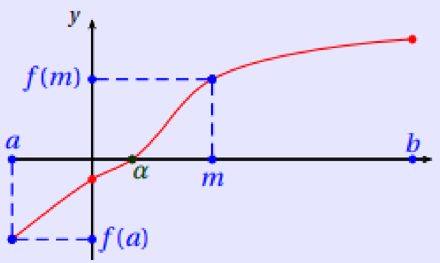
Dichotomie

On suppose que la fonction ***f* est continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec ***f*(*a*) et *f*(*b*) de signes opposés**.

La **méthode de dichotomie** est un algorithme de recherche d'un zéro d'une fonction qui consiste à répéter des partages d'un intervalle en deux parties (on divise la longueur par 2) puis à sélectionner le sous-intervalle dans lequel existe un zéro de la fonction.
Concrètement, on part d'un intervalle $[a\,;\,b]$ dans lequel on sait qu'il existe une solution à l'équation $f(x) = 0$. On calcule le centre m de l'intervalle et on teste si la solution se trouve dans $[a\,;\,m]$ ou dans $[m\,;\,b]$.

Si la solution α est dans $[a\,;\,m]$ donc si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes opposés soit :

$$f(a) \times f(m) < 0$$

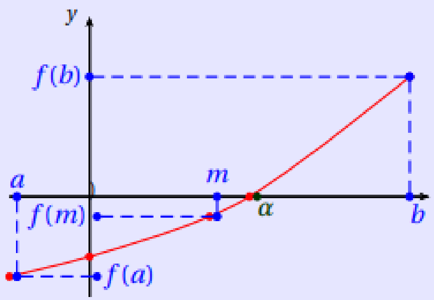


Si la solution α est dans $[a\,;\,m]$, on recommence ce procédé dans $[a\,;\,m]$ et donc on aura l'affectation :

$$b \longleftarrow m \text{ et donc } [a\,;\,b] \text{ devient } [a\,;\,m]$$

Si la solution α est dans $[m\,;\,b]$ donc si $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe soit :

$$f(a) \times f(m) > 0$$



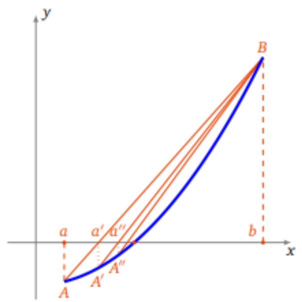
Si la solution α est dans $[m\,;\,b]$, on recommence ce procédé dans $[m\,;\,b]$ et donc on aura l'affectation :

$$a \longleftarrow m \text{ et donc } [a\,;\,b] \text{ devient } [m\,;\,b]$$

Code 2 (*dichotomie.py (2)*).

```
def dicho(a,b,n):
    for i in range(n):
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c) <= 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return a,b
```

L'idée de la méthode de la sécante est très simple : pour une fonction f continue sur un intervalle $[a,b]$, et vérifiant $f(a) \leqslant 0$, $f(b) > 0$, on trace le segment $[AB]$ où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. Si le segment reste au-dessus du graphe de f alors la fonction s'annule sur l'intervalle $[a', b]$ où $(a', 0)$ est le point d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des abscisses. La droite (AB) s'appelle la *sécante*. On recommence en partant maintenant de l'intervalle $[a', b]$ pour obtenir une valeur a''.



Code 5 (*secante.py*).

```
def secante(a,b,n):
    for i in range(n):
        a = a-f(a)*(b-a)/(f(b)-f(a))
    return a
```

Méthodes (exercices) :

	Hachette	Hatier	Mes exos	Sesamaths
A) Etude de la continuité	31-32,58-59	31-32,49-52	1	45
B) Utiliser le TVI	36-38	33-36	2	46
C) Encadrer une solution			2	
D) En déduire un signe		66	3	

Exercices de synthèse :

	Hachette	Hatier	Mes exos	Sesamaths
Algorithmes	39	54,70-71,88-89	4	
Synthèse math	65,67-68,82,87	64-66,106	5	48
éco			6	
physique			7	
Suites	34-35,72-73	37-38,80-86,104,107	8	47
QCM	-		9	
Vrai/faux	-	57,74	10	
Prise d'initiative	-		-	
Approfondissement	-	98,95,101	-	