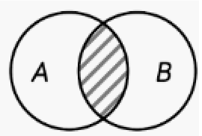
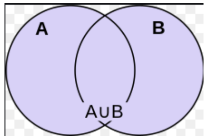
COMBINATOIRE ET DENOMBREMENT

VOCABULAIRE ENSEMBLISTE

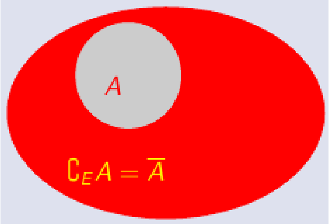
Ensemble : Collection d'objets, d'éléments. On note A un ensemble.
Pour un nombre fini d'éléments on note A = {élément1 ; élément2 ; …}
Ex : A = {1 ; 2 ; 3} 1 et 2 sont des éléments de A. On note $2 \in A$
Sous ensemble : Une partie d'un ensemble. On note B un sous ensemble de A. On dit que B est inclus dans A. On note $B \subset A$
Opérations sur les ensembles :
Intersection : $A \cap B$ est l'ensemble des éléments contenus dans A et B simultanément.



Réunion : $A \cup B$ est l'ensemble des éléments contenus dans A ou B (ou les deux)



Complémentaire : $\bar{A}$ (E\A ou $\complement_E A$) est l'ensemble des éléments non contenus dans A mais contenus dans E.



DENOMBREMENT :

But : Compter les éléments d'un ensemble E fini.

Cardinal : $card\ E = nbre\ d'éléments\ de\ E$
avec A, un ensemble fini.

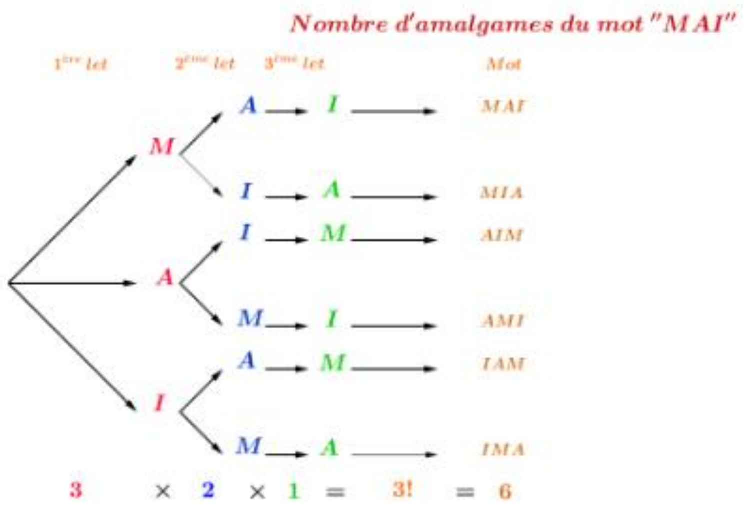
p-uplets (ou p-liste) : C'est une collection de p objets d'un ensemble E qui possède n éléments. Si p = 2 ce sont des couples, p = 3 des triplets….

Produit cartésien : E×F est l'ensemble des couples (x ; y) avec $x \in E$ et $y \in F$. Si E = F alors on note E^2

On note E, un ensemble de n éléments et F, un ensemble de p éléments.
Principe multiplicatif : Le nombre d'éléments de l'ensemble E×F est n×p
$card\ (E \times F) = card\ E \times card\ F$
Principe additif : Le nombre d'éléments de l'ensemble $E \cup F$ est n+p avec E et F disjoints.

Nombre de p-uplets : Le nombre de p-uplets d'un ensemble de n éléments est n^p
Ex : Pour 3 élts A, B et C combien de couples ?
$3^2 = 9 \to$ AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC

Permutations : Ce sont tous les ordres possibles dans les n-uplets constitués à partir d'un ensemble de n éléments (sans répétition)
sans repetition, n! = n×(n-1)×(n-2)×…×1
Ex : 3 élts 3! = 6 soit ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.
Avec répétition : $\frac{n!}{k!q!\ldots}$ avec k et q le nombre d'éléments présents plusieurs fois dans l'ensemble.
Ex : Soit 3 élts A,B et B on a : $\frac{3!}{2!} = 3$ permutations possibles → ABB, BAB, BBA
Propriétés de la factorielle :
0 ! = 1
n != n×(n-1) !



Arrangements : Ce sont tous les k-uplets (sans ordre et sans répétition) d'un ensemble de n éléments.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ex : Pour 3 élts A, B et C combien de couples ?

$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$ AB, BA, AC, CA, BC, CB

Combinaisons : C'est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble de n éléments.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ex : Pour 3 élts A, B et C combien de couples ?

$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ AB, AC, BC

Propriétés des coefficients binomiaux :

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{k} = \binom{n-k}{k}$

3) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

4) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

6) Une application entre deux ensembles finis de même cardinal ↔ bijective.

Triangle de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

n\k	0	1	2	3
0	**1**			
1	**1**	**1**		
2	**1**	**2**	**1**	
3	**1**	**3**	**3**	**1**

Nombre de parties d'un ensemble :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Résumé dénombrement :

	Avec répétition	Sans répétition
Ordre	p-liste n^p Ex : Pour 3 élts A, B et C combien de couples ? 3² = 9 AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC	Arrangements $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ Ex : Pour 3 élts A, B et C combien de couples ? $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$ AB, BA, AC, CA, BC, CB
Sans ordre	Combinaisons $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ Ex : Pour 3 élts A, B et C combien de couples ? $\frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!} = 6$ AB, AC, BC, AA, BB, CC	Combinaisons $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Ex : Pour 3 élts A, B et C combien de couples ? $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ AB, AC, BC

Algorithmes :

En python la fonction factorial(x) renvoie x! (nécessite from math import)*

Algorithmes pour déterminer la liste des $\binom{n}{k}$ pour n fixé

Langage naturel	Python
Saisir n Liste est une liste Pour i allant de 1 à n Ajouter à liste $\binom{n}{i}$ Fin Pour Renvoyer (Liste)	(voir code ci-dessous)

```python
from math import*
def combinaison(n):
    L= []
    for i in range(1,n+1):
        L.append(factorial(n)/
                 (factorial(i)*factorial(n-i)))
    return(L)
```

Génération des parties à 2, 3 éléments d'un ensemble de n éléments	Génération des permutations d'un ensemble de n éléments
	(voir code ci-dessous)

```python
def permutation(Liste):
    if len(Liste)==0:
        return []
    if len(Liste)==1:
        return (Liste)
    l=[]
    for i in range(len(Liste)):
        m=Liste[i]
        liste2=Liste[:i]+Liste[i+1:]
        for p in permutation(liste2):
            l.append([m]+p)
    return (l)
```

Démonstrations :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Méthodes (exercices) :

	Hachette	Hatier	Mes exos	Sesamaths
A) Représenter le problème (arbre, tableau, diagramme)		35-38	Ex. 1	Ex.1
B) Dénombrer	1-92	39-47,58-118	Ex. 2	Ex.2

Exercices de synthèse :

	Hachette	Hatier	Mes exos	Sesamaths
Algorithmes	96-100	127	Ex. 3	Ex.4
Synthèse	97,99	124-125,128,135-140	Ex. 4	Ex.5
QCM	93,98		Ex. 5	
Vrai/faux	94-95		-	
Prise d'initiative			Ex.6	Ex.3
Approfondissement		122		