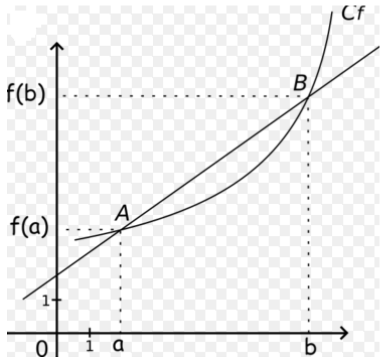
DERIVATION ET CONVEXITE - COURS

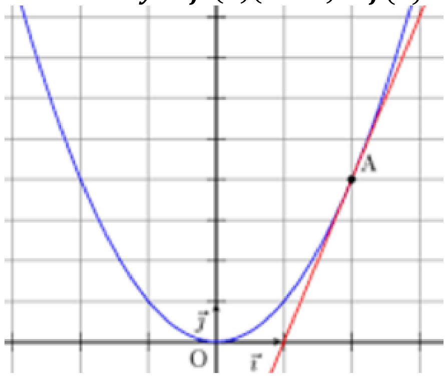
<u>Taux de variation (acroissement) :</u> Le taux de variation entre a et b, deux nombres appartenant à l'ensemble de définition de f est donné par : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

<u>Interprétation graphique :</u> le taux de variation entre a et b est le coefficient directeur (pente) de droite sécante à la courbe représentative de f qui passe par les points $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$



<u>Nombre dérivée en un point :</u> Le nombre dérivée en a d'une fonction f est le nombre noté **f'(a)** telle que $\boldsymbol{f'(a)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ on appelle $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ le taux d'accroissement.

<u>Interprétation graphique :</u> le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en x = a.
L'équation de la tangente en x = a est $\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$



<u>Composée :</u> Si g définie sur I et f sur J et si g(x) ∈ J alors la composée est la fonction :

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

<u>Dérivée des fonctions de référence</u>

Fonction f	**Domaine de définition**	**Fonction dérivée f'**	**Domaine de dérivabilité**
Fonction constante $f(x) = a$	R	$f'(x) = 0$	R
$f(x) = x$	R	$f'(x) = 1$	R
$f(x) = x^2$	R	$f'(x) = 2x$	R
$f(x) = x^3$	R	$f'(x) = 3x^2$	R
avec n un entier relatif $f(x) = x^n$	R	$f'(x) = nx^{n-1}$	R
$f(x) = \frac{1}{x}$	R^*	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	R^*
$f(x) = \sqrt{x}$	R^+	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	R^{*+}
$f(x) = \cos(x)$	R	$f'(x) = -\sin(x)$	R
$f(x) = \sin(x)$	R	$f'(x) = \cos(x)$	R
$f(x) = e^x$	R	$f'(x) = e^x$	R

<u>Opérations sur les dérivées</u>

Somme de fonctions $f = u + v$	$f' = u' + v'$
Multiplication par un réel k $f = k \times u$	$f' = k \times u'$
Produit de fonctions $f = u \times v$	$f' = u' \times v + v' \times u$
Inverse d'une fonction $f = \frac{1}{u}$	$f' = -\frac{u'}{u^2}$
Quotient de fonctions $f = \frac{u}{v}$	$f' = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$
Composée (attention domaine de dérivabilité) $f \circ g(x) = f(g(x))$	$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$

Application de la dérivation : étude des variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction, on calcule d'abord sa dérivée. Puis, on étudie le signe de la dérivée à l'aide d'un tableau de signe.

- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ sur un intervalle I (strictement croissante si >)

- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ sur un intervalle I (strictement décroissante si <)

- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ sur un intervalle I

Exemple tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		-	*0*	+	
f(x)	↘			↗	

Intérêt du tableau de variations :

Extremums : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de R et a un réel de l'intervalle.

- f admet un maximum en a sur I lorsque pour tout x de I, $\boldsymbol{f(x) \leq f(a)}$

Le maximum vaut alors f(a) et est atteint en a.

- f admet un minimum en a sur I lorsque pour tout x de I, $\boldsymbol{f(x) \geq f(a)}$

Le minimum vaut alors f(a) et est atteint en a.

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, ouvert de R, et a un réel de I (qui n'est pas une borne de I). **Si la fonction f admet un extremum en a alors f'(a) = 0** (réciproque fausse).

Remarque : Pour que f(a) soit un extremum, il faut que f'(a) = 0 et que f' change de signe en a.

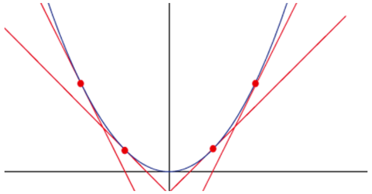
Encadrement : Les tableaux de variations permettent également d'encadrer une fonction sur un intervalle donné.

Dérivation seconde : La dérivée de la dérivée qui se note f''

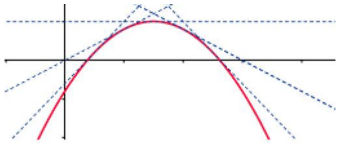
Convexité :

Aspect graphique:

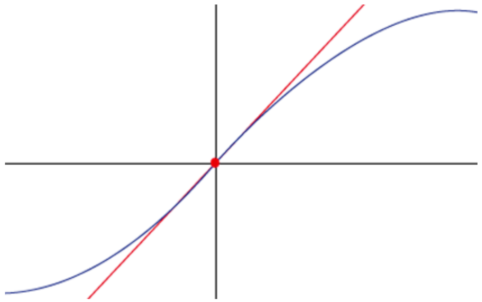
- Une fonction est convexe si la courbe représentative de la fonction est située au dessus de ses tangentes.



- Une fonction est concave si la courbe représentative de la fonction est située en dessous de ses tangentes.



- Un point d'inflexion correspond à un point de la courbe où la tangente traverse la courbe.



Lien dérivée seconde et convexité :

- Si $f''(x) > 0$ (càd f' est croissante) sur I alors f est convexe sur I.
- Si $f''(x) < 0$ (càd f' est décroissante) sur I alors f est concave sur I.
- Si $f''(x) = 0$ sur I alors f admet un point d'inflexion en x (si f'' change de signe au voisinage de x).

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f''(x)		-	*0*	+	
f'(x)	↘			↗	
f(x)		Concave		Convexe	

Encadrement et convexité : pour t ∈ [0 ; 1]

Si f est convexe sur [a ; b] alors $f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b)$

Si f est concave sur [a ; b] alors $f(ta+(1-t)b) \geq tf(a)+(1-t)f(b)$

Démonstrations : Si f'' est positive alors la courbe est au dessus des tangentes

Approfondissements :

Courbe de Lorenz

On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions suivantes :

- L est définie sur $[0\,;1]$;
- L est croissante sur $[0\,;1]$;
- $\mathrm{L}(0)=0$ et $\mathrm{L}(1)=1$;
- pour tout x de $[0\,;1]$, $\mathrm{L}(x) \leqslant x$.

Dérivée n-ième

Si on dérive n fois, on obtient la dérivée n-ième : on la note $f^{(n)}(x)$

Inégalité arithmético-géométrique

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leqslant \frac{x_1+\cdots+x_n}{n},$$

Méthodes (exercices) :

	Hachette	Hatier	Mes exos	Sesamaths
Révisions			1	
A) Calculs de dérivées par composition	1-14	33,34,48-53	2	32,33
B) Calculer une dérivée seconde	15-16	65-66	3	-
C) Etudier la convexité (graphe + calculs)	17-30	35,36,67-70	4	34
D) Etablir des inégalités avec la convexité	62,76	84-86	5	35
E) Tracer l'allure d'une courbe		38	6	-

Exercices de synthèse :

	Hachette	Hatier	Mes exos	Sesamaths
Algorithmes				
Synthèse math	82,55	106,107	8	36
éco	85	96,105	7	
physique	86	95,97,100	9	
QCM			10	
Vrai/faux	46,47	76,92	11	
Prise d'initiative			-	
Approfondissement	83	98	-	37