EXERCICES – FONCTIONS GENERALITES

Exercice 1 (Images/antécédents - Calculs)

Partie 1 :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$ 2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ 3) $f(x) = \frac{2x-4}{3x-5}$

4) $f(x) = |x|$

5) $f(x) = 3x - 4$ 6) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ 7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

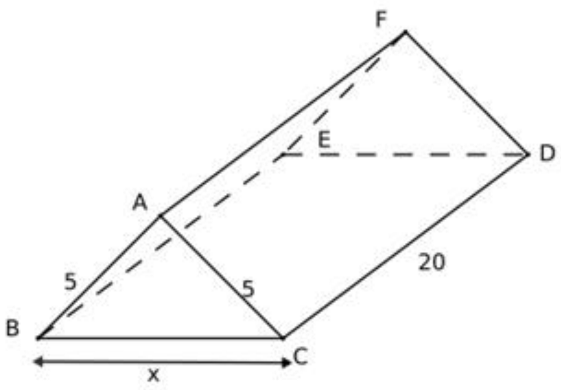
Partie 2 :

A)

Un chocolatier veut faire fabriquer une nouvelle boîte de présentation pour Pâques. Elle aura la forme d'un prisme droit dont deux des faces sont deux rectangles de 20 cm de longueur sur 5 cm de largeur.

Une section de ce prisme par un plan perpendiculaire à la face $BCDE$ est le triangle ABC isocèle en A. La longueur $BC = x$ représente l'écartement entre les deux rectangles.

Le but du problème est de déterminer x tel que le volume de cette boîte soit le plus grand possible.



1. (a) Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

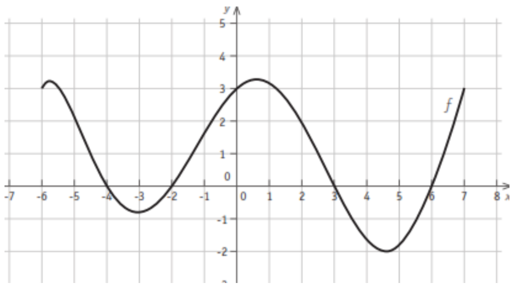
B)

Dans un atelier, on fabrique chaque jour une quantité q d'objets et le coût de fabrication, en centaines d'euros, de ces q objets est donné par $C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 4q^2 + 21q + 4$.

Les contraintes de production de l'atelier ne permettent pas de produire plus de 25 objets par jour.

Quelle est l'ensemble de définition de la fonction C ?

Partie 3 :



Quelle est l'ensemble de définition de la fonction f ?

Exercice 2 (Images/antécédents - Calculs)

Partie 1 :

Soit la fonction $f(x) = 4x - 6$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer l'image de 4 ; 5 et -2 par la fonction f.
3) Calculer f(-1) ; f(0) et f(-3)
4) Déterminer le ou les antécédents de 8 ; 10 et – 12 par la fonction f.

Soit la fonction $g(x) = -2x^2 + 5$

1) Déterminer l'ensemble de définition de g
2) Déterminer l'image de 4 ; 5 et -2 par la fonction g.
3) Calculer g(-1) ; g(0) et g(-3)
4) Déterminer le ou les antécédents de 8 ; 10 et – 12 par la fonction g.

Soit la fonction $h(x) = \sqrt{x} + 5$

1) Déterminer l'ensemble de définition de h
2) Déterminer l'image de 4 ; 5 et 3 par la fonction h.
3) Calculer h(1) ; h(0) et h(3)
4) Déterminer le ou les antécédents de 8 ; 10 et 12 par la fonction h.

Partie 2 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$.

Calculer les images de :

1) 2 2) -3 3) 0 4) $\sqrt{5}$

On définit deux fonctions k et l, définies sur $\mathbb{R}$, par :

$$k(x) = 2x + 3 \text{ et } l(x) = x^2.$$

1) Déterminer le(s) antécédent(s) de 2 par la fonction k.
2) Déterminer le(s) antécédent(s) de 3 par la fonction l.
3) Citer un nombre qui n'a pas d'antécédent par l.

Partie 3 :

Une entreprise produit et commercialise un article A. Sa capacité de production mensuelle est limitée à 12 milliers d'articles.
Soit C_T la fonction définie pour tout réel x élément de l'intervalle $[0; 12]$ par :

$$C_T(x) = x^3 + x^2 + 363$$

La fonction C_T modélise sur l'intervalle $[0; 12]$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.

1) Quel sera le coût de fabrication de 2000 articles ?
2) Combien faut-il produire d'articles pour que le coût soit de 363 k€ ?

Partie 4 :

1) f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$

Calculer les images par f des réels : $-2, 0, 1, \sqrt{2}$.

2) g est la fonction définie par : $g(x) = x^2 + x - 5$

Calculer les image par g des réels $4, 6, -5, 0$.

Partie 5 :

x	-2	-1	6	10	12	3
f(x)	4	6	-2	3	-2	-1

1) Déterminer l'image de -1 par la fonction f.
2) Déterminer le ou les antécédents de 3 par la fonction f . De même déterminer le ou les antécédents de -2 par la fonction f.
3) Déterminer f(10)

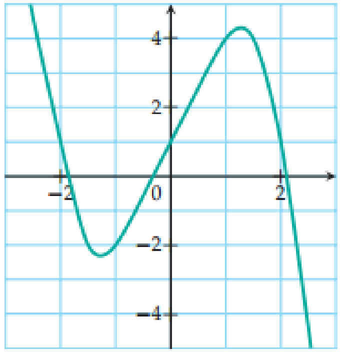
x	-3	-2	0	4	7	9
g(x)	-2	0	-3	2	-2	4

1) Déterminer l'image de 4 par la fonction g.
2) Déterminer le ou les antécédents de -2 par la fonction f . De même déterminer le ou les antécédents de 0 par la fonction f.
3) Déterminer f(-2)

Exercice3 (Lire graphiquement antécédents/images - Equations)

Partie 1 :

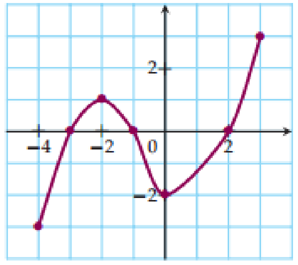
Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1) Par lecture graphique, déterminer :
   a) l'image de -1 par f ;
   b) $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(2)$;
   c) le(s) antécédent(s) de 1 par f ;
   d) les éventuels nombres qui ont 0 pour image.
2) Citer, si possible, un nombre qui a :
   a) aucun antécédent ;
   b) 1 antécédent ;
   c) 2 antécédents ;
   d) 3 antécédents.

Partie 2

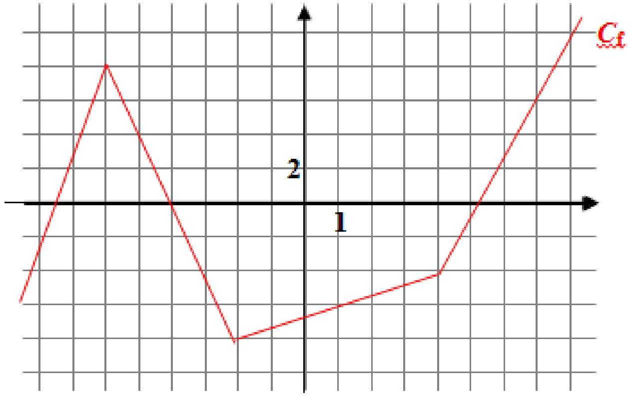
On considère une fonction f définie sur $[-4; 3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



1) Quels sont le (ou les) antécédent(s) de 0 par f ?
2) Combien d'antécédent(s) possède 2 ?
3) Quel est le nombre d'antécédent(s) de 1 ?
4) Donner un nombre réel m qui n'a qu'un unique antécédent par f.
5) Donner le nombre d'antécédent(s) de t par f, suivant les valeurs de t.

Partie 3

Résoudre les équations :

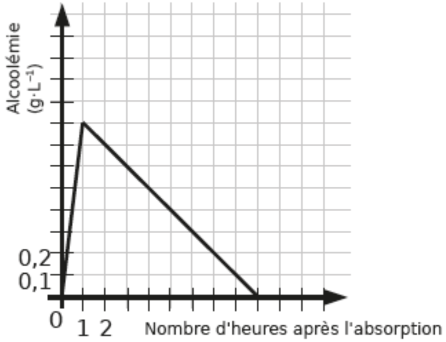


1) $f(x) = 8$ 3) $f(x) = 3$ 5) $f(x) = -4$

2) $f(x) = 0$ 4) $f(x) = -2$ 6) $f(x) = 10$

Partie 4

On mesure le taux d'alcoolémie chez un homme après l'absorption d'une boisson alcoolisée à jeun.



a. Quel est le taux d'alcoolémie au bout de trois heures ?

b. Quand le taux d'alcoolémie est-il de 0,5 g·L^{-1} ?

c. Quand le taux d'alcoolémie est-il maximal ?

d. Au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie est-il nul ?

Exercice 4 (Appartenance d'un point à une courbe - Tracé)

Partie 1 :

Avec l'aide de la calculatrice, dresser un tableau de valeurs de la fonction r définie sur $[-10;10]$ par $r(x) = \sqrt{x^2+1}$ avec un pas de 1.

Tracer la représentation graphique de la fonction

Partie 2 :

Tracer à 'aide de votre calculatrice la fonction définie sur $[-2;2.5]$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 2$

Indiquer les réglages de la fenêtre à utiliser pour avoir un aperçu correct de la fonction.

Partie 3 :

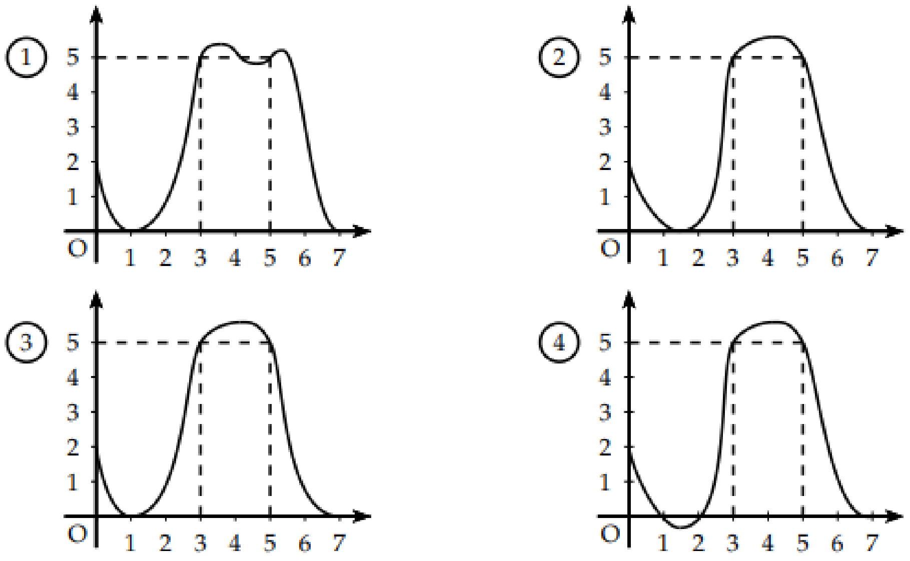
1) Le point A(-2 ; 3) appartient-il à la courbe représentative de f(x) = 3x + 9

2) Le point B(0 ; 1) appartient-il à la courbe représentative de g(x) = x^2-4

Partie 4 :

Parmi les courbes suivantes, retrouver la courbe représentative de la fonction f, sachant que :

- 1 a pour image 0 par f.
- 0 a pour image 2 par f.
- 5 est l'image de 3 et 5 par f.
- Si $x \in [3;5]$, alors $f(x) \geqslant 5$.
- L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions.



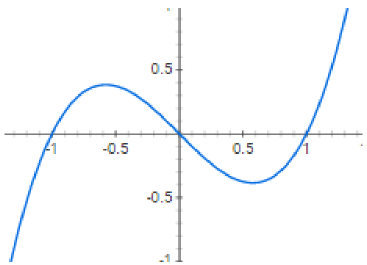
Exercice5 (Parité d'une fonction)

Partie 1

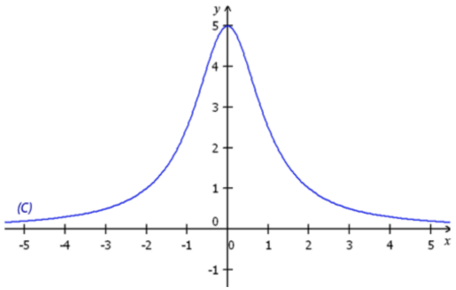
Étudier la parité des fonctions suivantes.

- $f_1 : x \mapsto x^2 + 4$
- $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$
- $f_3 : x \mapsto \dfrac{1+x^2+x^4}{x(x^2+x^4)}$
- $f_4 : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-2}$

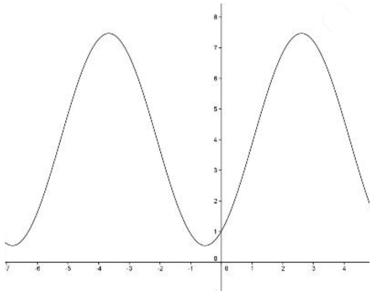
Partie 2 : Etudier graphiquement la parité des fonctions suivantes :



fonction f



fonction g



fonction h

Exercice 6 (Modéliser un problème par une fonction)

Partie 1 :

Si $C(q)$ est le coût total de fabrication de q objets, on rappelle que :

- Le coût moyen unitaire de fabrication noté $C_M(q)$ lorsque l'on produit q objets est donné par : $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$
- Le coût marginal $C_m(q)$ (coût supplémentaire engendré par la fabrication d'un objet supplémentaire lorsque l'on produit q objets) est : $C_m(q) = C'(q)$

Dans un atelier, on fabrique chaque jour une quantité q d'objets et le coût de fabrication, en centaines d'euros, de ces q objets est donné par $C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 4q^2 + 21q + 4$.
Les contraintes de production de l'atelier ne permettent pas de produire plus de 25 objets par jour.

1. Exprimer la fonction coût moyen $C_M(q)$ en fonction de q

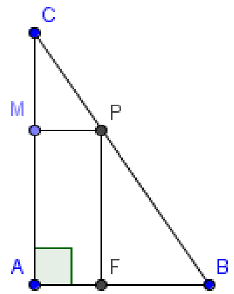
Partie 2 :

Une entreprise produit des appareils électroménagers.
Le coût horaire de production de x appareils est donné en euros par :

$$C(x) = x^2 + 50x + 100 \qquad \text{pour } 5 \leq x \leq 40$$

1. L'entreprise vend chaque appareil 100 euros.
   (a) Justifier que le bénéfice horaire réalisé par la fabrication et la vente de x appareils est :
   $$B(x) = -x^2 + 50x - 100 \qquad \text{pour } x \in [5; 40]$$

Partie 3 :

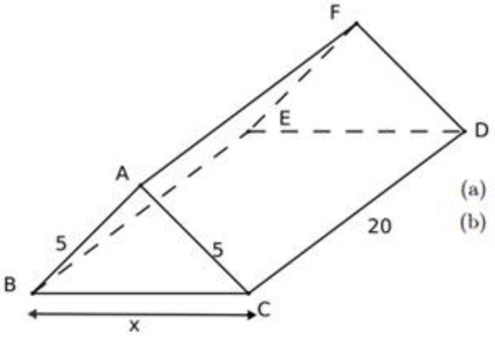


Soit le triangle ABC rectangle en A. On a AB = 3 cm ; AC = 4 cm et BC = 5 cm. On considère le point M situé sur le segment [AC]. On pose AM = x. P appartient au segment [BC] et F au segment [AB]. MPFA est un rectangle.

1) Déterminer l'expression de PM en fonction de x.

2) En déduire l'aire A(x) de MPFA en fonction de x.

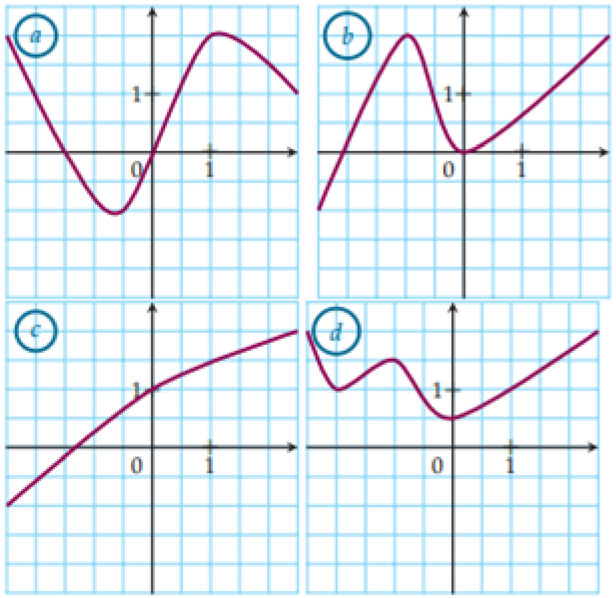
Partie 4 :



(a) Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de x.
(b) Exprimer le volume V du prisme en fonction de x.

Exercice 7 (Tableau de signes)

Partie 1 : Dresser le tableau de signes des fonctions suivantes :

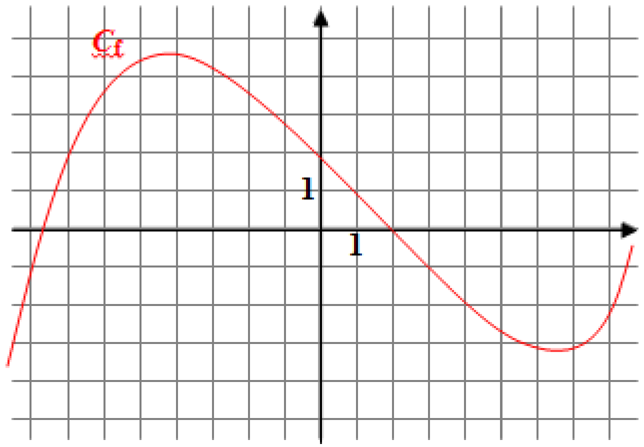


Partie 2 : Dresser le tableau de signes des fonctions suivantes :

1) f(x) = (9x-1)(4-x) définie sur R
2) g(x) = 3x+4 définie sur R
3) h(x) = (3x+2)/(x+4) définie sur R privé de -4

Exercice8 (Résoudre graphiquement une inéquation)

Partie 1 : Résoudre les inéquations suivantes



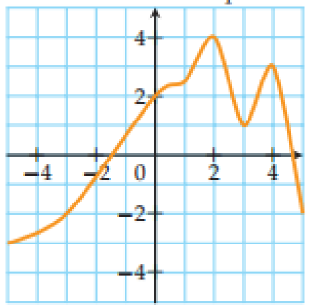
1) $f(x) > 2$ 3) $f(x) \leq 3{,}5$ 5) $f(x) > -4$

2) $f(x) \geq 0$ 4) $f(x) < -2$ 6) $f(x) < 5$

Partie 2 :

Voici la courbe représentative d'une fonction h définie sur $[-5;5]$. Estimer les solutions des inéquations.

1) $h(x) \geqslant 0$
2) $h(x) < -4$
3) $h(x) < -2$
4) $h(x) > 3$



Exercice9 (Résoudre algébriquement une inéquation)

Partie 1 :

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $f(x) < 6$ avec $f(x) = \frac{3x+2}{4x-5}$
2) $g(x) \geq 1$ avec $g(x) = x^2 + x + 1$
3) $h(x) > -2$ avec $h(x) = 3x - 2$
4) $p(x) \leq -3$ avec $p(x) = \frac{4x+2}{x}$

Partie 2 :

On modélise le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, par la fonction $B(x) = 3x^2 - 2x + 1$ avec x, le nombre de centaines d'articles vendus.

1) Combien l'entreprise doit-elle vendre d'articles pour réaliser un bénéfice de plus de 1000 € ?

Partie 3 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir les résultats suivant :

f(x)=x^2-2*x-3
$f(x) = x^2 - 2x - 3$
Factoriser(f(x))
$f(x) = (x-3)(x+1)$

Utiliser le résultat du logiciel pour résoudre l'inéquation :

$f(x) > 0$

Partie 4 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir les résultats suivant :

f(x)=x^2-2*x +1
$f(x) = x^2 - 2x - 3$
Solve(f(x)>0,x)
S=]-∞ ; 1[∪]1 ; +∞[

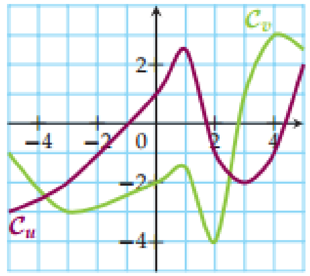
Utiliser le résultat du logiciel pour résoudre l'inéquation :

$f(x) > 0$

Exercice10 (Résoudre une inéquation avec f(x)>g(x))

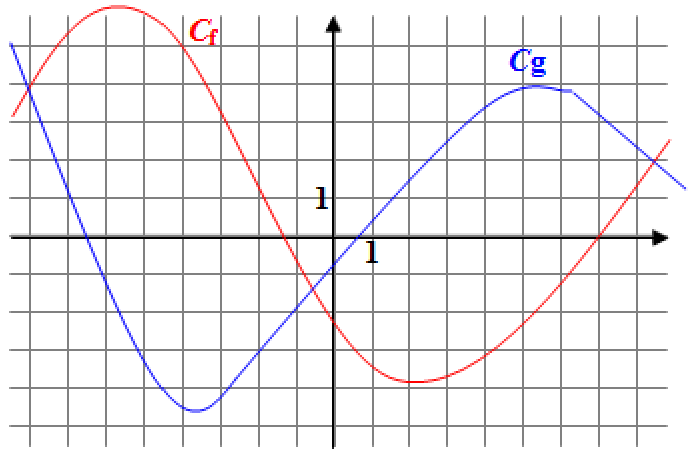
Partie 1 :

Voici les courbes représentatives de deux fonctions u et v définies sur $[-5;5]$. Estimer les solutions des (in)équations ci-dessous.



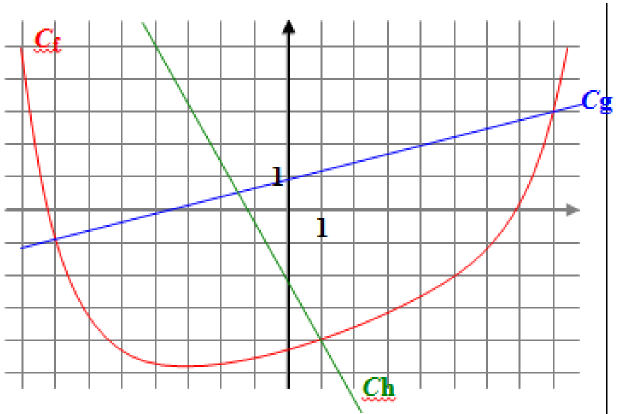
1) $u(x) = v(x)$
2) $u(x) \leqslant v(x)$

Partie 2 :



1) $f(x) = g(x)$
2) $g(x) < f(x)$

Partie 3 :



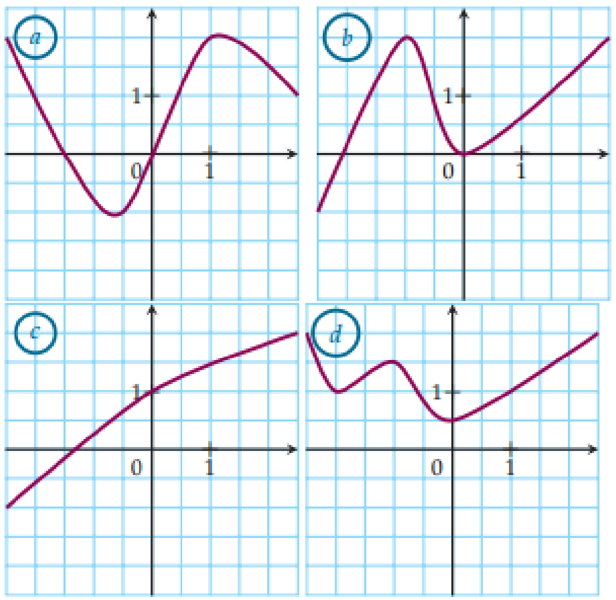
1) $f(x) \geq g(x)$ 3) $g(x) < h(x)$

2) $f(x) \leq h(x)$ 4) $f(x) = h(x)$

Exercice 11 (Graphe et tableau de variations)

Partie 1 :

Pour chacune des courbes suivantes, établir le tableau de variations des fonctions représentées.



Partie 2 :

Pour chacune des fonctions suivantes, tracer une représentation graphique sur la calculatrice, puis décrire ses variations et dresser son tableau de variations le plus précisément possible.

1) $f(x) = 4x^3 - 5x + 2,5$ 2) $g(x) = \dfrac{3x-6}{x+2}$

Partie 3 :

Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-4		-1		1		3		$3,5$
$f(x)$	-4	↗	-2	↘	-5	↗	0	↘	-1

Tracer deux courbes différentes susceptibles de représenter graphiquement la fonction f.

Partie 4 :

Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f à partir de son tableau de variation et des renseignements donnés.

$D_f = \mathbb{R}$; $f(0) = 1$; $f(6) = -1$ et pour tout x, $f(x) > -2$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	1	↘	

Partie 5 :

Soit la fonction f définie sur $[0,5 ; +\infty[$ par la relation suivante :

$f(x) = 4x^2 - 2x$

Soient a et b, deux réels, appartenant à l'intervalle $[0,5 ; +\infty[$ tels que $a < b$

On cherche à prouver que f est croissante sur $[0,5 ; +\infty[$, par conséquent si $a < b$ alors on a $f(a) < f(b)$

1) Exprimer $f(b) – f(a)$ en fonction de a et b.

2) Mettre $(b-a)$ en facteur dans cette expression

3) a) Quel est le signe de $(b-a)$?

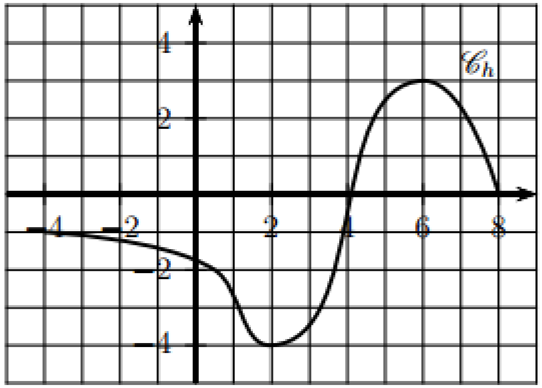
3) b) Quel est le signe de $4(b+a) – 2$? Sachant que $b + a \geq 1$

4) En déduire le signe de $f(b) – f(a)$. Conclusion ?

Exercice 12 (Extremum)

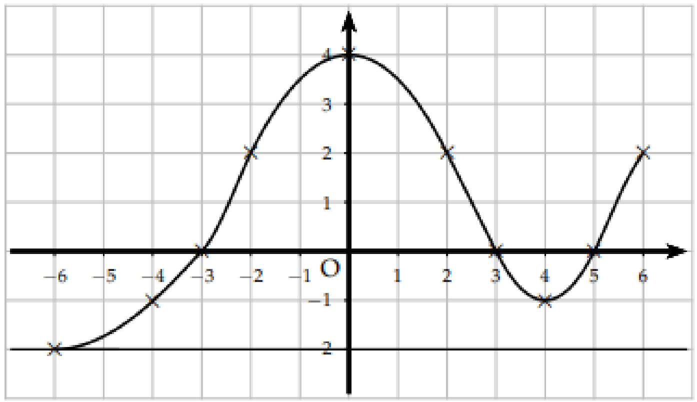
Partie 1 :

Déterminer les extremums de la fonction et la ou les valeurs pour lesquelles ils sont atteints



Partie 2 :

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-6, 6]$ par le graphique suivant :



1) Quel est le minimum de f sur $[-3;6]$?
2) Quel est le minimum de f sur $[-6;6]$?

Partie 3 :

Déterminer les extremums de la fonction et la ou les valeurs pour lesquelles ils sont atteints

x	-4		-1		4
$f(x)$	-5	↗	2	↘	-2

Partie 4 :

Déterminer les extremums de la fonction et la ou les valeurs pour lesquelles ils sont atteints

x	-5		2		4		10
$f(x)$	8	↘	1	↗	9	↘	3

Partie 5 :

Montrer que la fonction $f(x) = x^2 + 2x + 2$ admet 1 pour minimum

Exercice 13 (Relier signe et variations)

Partie 1 :

Dresser le tableau de signe de la fonction ci-dessous :

x	-2		0		$0{,}5$		3		$+\infty$
$f(x)$	-1	↘	-2	↗	0	↗	2	↘	

Partie 2 :

Dresser le tableau de signe de la fonction ci-dessous :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	1	↗	

Partie 3 :

Dresser le tableau de signe de la fonction ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		2		8		15		22		$+\infty$
$f(x)$		↗	-3	↘	-10	↗	0	↗	$\sqrt{2}$	↘	0	↘	

Exercice 14 (Comparaison)

Partie 1 :

1) Soit la fonction f définie sur [-5 ; 4] dont voici le tableau de variations :

x	-5		-2		1		4
f(x)	-5	↗	6	↘	-7	↗	2

a) Tracer dans un repère orthonormé (O, I, J) une courbe représentative possible de la fonction f.

b) La fonction f admet-elle un maximum ? Si oui, le déterminer.

c) Comparer, si c'est possible :

i) f(-4) et f(-1) ii) f(-2) et f(3) iii) f(-1) et f(0)

iiii) f(2) et f(0)

d) Encadrer f(x) pour x appartenant à [-2 ; 4]

2) Soit la fonction p dont voici le tableau de variations :

x	-4		2		5		10
p(x)	-3	↗	5	↘	1	↗	7

a) Déterminer l'ensemble de définition de p.

b) Dessiner une représentation graphique possible de la fonction p dans un repère de votre choix.

c) La fonction p admet-elle un maximum ? un minimum ? Si le(s)quel(s) ? En quelle valeur sont-ils atteints ?

d) Comparer, si c'est possible :

i) p(5) et p(-2) ii) p(-2) et p(0) iii) p(3) et p(4)

iiii) p(3) et p(6)

e) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles f(x) > 1

f) Encadrer f(x) pour x appartenant à [-4 ; 5]

Partie 2 :

x	-2		0		3		4
$f(x)$	-1	↗	$\frac{5}{2}$	↘	-1	↗	6

Comparer si possible les nombres suivants.

1) $f(-2)$ et $f(-1)$

2) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)$

3) $f(-1)$ et $f(1)$

4) $f(3,6)$ et $f(3,7)$

5) $f\left(\frac{7}{2}\right)$ et $f(4)$

6) $f(1)$ et $f(3,5)$

Partie 3 :

Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	3		5		6		10
$f(x)$	4	↗	9	↘	-4	↗	1

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie, fausse ou si on ne peut pas conclure. Justifier.

1) $f(3) < f(4)$

2) $f(4,9) > f(5,9)$

3) $f(5,1) < f(5,9)$

4) $f(10) > f(3)$

5) f est définie sur $[-2;10]$;

6) 5 est le maximum de f sur $[3;10]$;

7) f admet un minimum absolu en 3 sur sur $[3;10]$;

8) $f(x)$ appartient à $[-4;9]$.

Partie 4 :

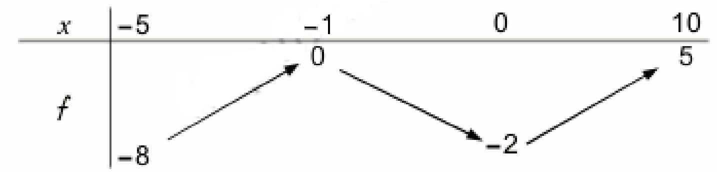
Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{6x+1}{2x-4}$ dont la courbe représentative est notée C.

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

2) Démontrer que $f(x) = 3 + \frac{14}{2x-4}$

4) Soit la droite D d'équation $y = 2x + 1$. Etudier la position relative de D et C.

Partie 5 :



Soit la fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessus. Déterminer le nombre de solutions de l'équation f(x) = k.

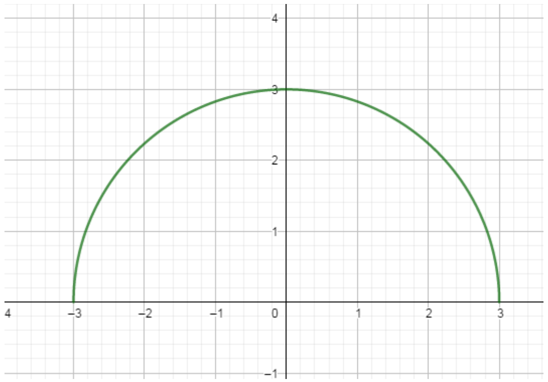
a) Avec k = -5 b) Avec k = -1 c) Avec k = 7 d) Avec k = 3

Exercice 15 (Algorithmes) :

Partie 1 : approximation de longueur de courbe

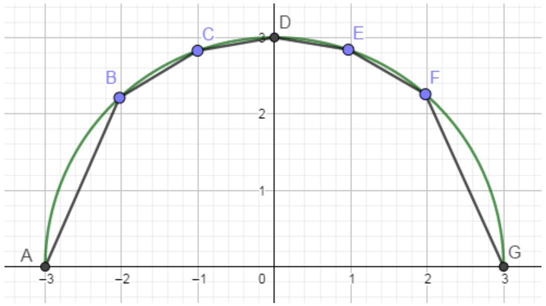
On modélise un demi-cercle de rayon 3 par une fonction f telle que :

$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ définie sur [-3 ; 3] dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



1) Quelle est la valeur exacte de la longueur de ce demi-cercle ?

2) Pour estimer cette valeur, on approxime le demi-cercle à l'aide de six segment (schéma ci-dessous)



a) Compléter le tableau ci-dessous à l'aide de la calculatrice :

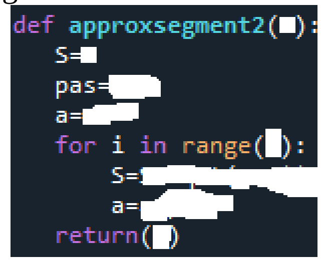
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)							

b) Calculer la valeur exacte des segments AB ; BC ; CD ; DE ; EF et FG.

c) En déduire une valeur approchée de la longueur du demi-cercle. Comparer avec une valeur approchée de la valeur exacte donnée par la calculatrice.

3) On se propose d'améliorer l'estimation de cette longueur en augmentant le nombre de segments approximant la courbe.

a) Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie une approximation de la longueur du demi-cercle à l'aide de N segments



b) Faire fonctionner ce programme pour N = 11 et N =99 et comparer à la valeur exacte. Que remarque t-on ?

Partie 2 : Balayage vs dichotomie

On se propose d'estimer de deux manières différentes une valeur approchée de $\sqrt{7}$.

Méthode par balayage :

On suppose que $\sqrt{7}$ est solution de l'équation $x^2 - 7 = 0$. On calcule un encadrement de $\sqrt{7}$ à 10^{-3} par le programme python suivant :

```python
def balayage1():
    a=2
    m=2
    compteur=0
    while (a**2-7)*(m**2-7)>0:
        m=a
        a=a+10**-3
        compteur=compteur+1
    return(m,a,compteur)
```

1) Que représente la valeur compteur renvoyée par la fonction ?
2) Quelles sont les valeurs renvoyées par l'algorithme ?

<u>Méthode par dichotomie :</u>

On considère la fonction $f(x) = x^2 - 7$ définie sur $\mathbb{R}$.

Voici le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-7	$\nearrow$	

1) Justifier que $f(2) < 0 < f(3)$

On calcule un encadrement de $\sqrt{7}$ à 10^{-3} par le programme python suivant :

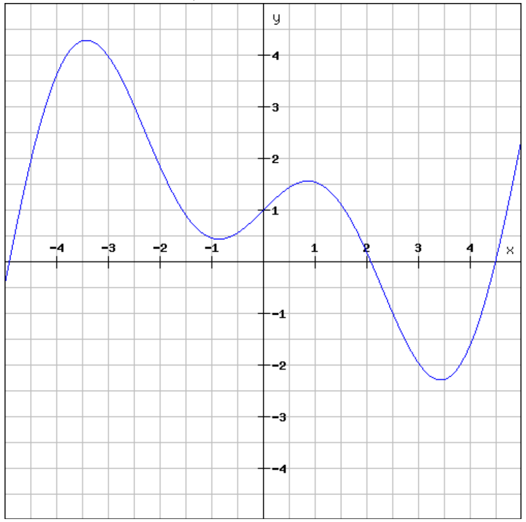
```python
def dichotomie1():
    a=2
    b=3
    compteur=0
    while b-a>10**-3:
        m=(a+b)/2
        if m**2-7<0:
            a=m
        else:
            b=m
        compteur=compteur+1
    return(a,b,compteur)
```

2) Quelles sont les valeurs renvoyées par l'algorithme ?
3) Quel est l'algorithme le plus efficace pour donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $\sqrt{7}$?

<u>Exercice 16 (Synthèse) :</u>

<u>Partie 1 :</u>

Soit la fonction g définie sur [-5 ; 5] dont voici la courbe représentative :



1) Quelle est l'image de 1 par la fonction g ?
2) Donner un ou des antécédents de 1 par la fonction g ?
3) La fonction admet elle un maximum ? Si oui en quelles sont les coordonnées du point correspondant ? Même question pour un minimum.
4) Déterminer le(s) intervalle(s) où la fonction g est croissante ? Faites de même pour le(s) intervalle(s) où g est décroissante.
5) Tracer le tableau de variations de la fonction g
6) En utilisant uniquement le tableau de variations, comparer (si c'est possible) g(-4) et g(-3,5), g(1) et g(2), g(-3) et g(1), g(-2,5) et g(-1,5).

<u>Partie 2 :</u>

On considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 + 2x - 3 \text{ et } g(x) = \frac{2x-7}{3x+5}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des deux fonctions.
2. (a) Calculer les images par f de 3 et de -4.
   (b) Déterminer les antécédents de -4 par f, puis les antécédents de -3 par f.
3. (a) Calculer les images par g de 2 et de -4.
   (b) Déterminer les antécédents de 1 par g, puis les antécédents de -2 par g.

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-10; 10]$.

x	-10		-7		0		6		10
Variations de f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	5	$\searrow$	3

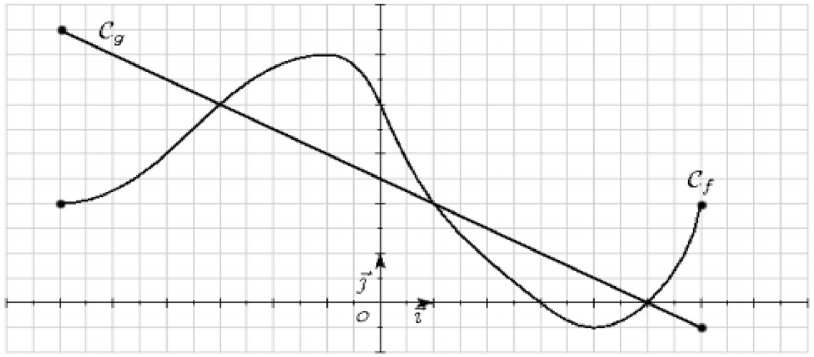
1. A l'aide du tableau comparer : $f(1)$ et $f(3)$, $f(-5)$ et $f(-3)$, $f(7)$ et $f(-2)$.
2. Quel est le minimum de f sur $[-10; 10]$? le maximum ?
3. Combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions ?

Partie 3 :

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentent deux fonctions.

1. Sur quel ensemble D ces fonctions sont-elles définies ?
2. Quelle est l'image de -4 par f ? par g ?
3. Donner les antécédents de 2 par f.
4. Quel est le maximum de f sur D ? le minimum de f sur D ?
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
6. Donner le tableau de signes de $f(x)$.
7. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

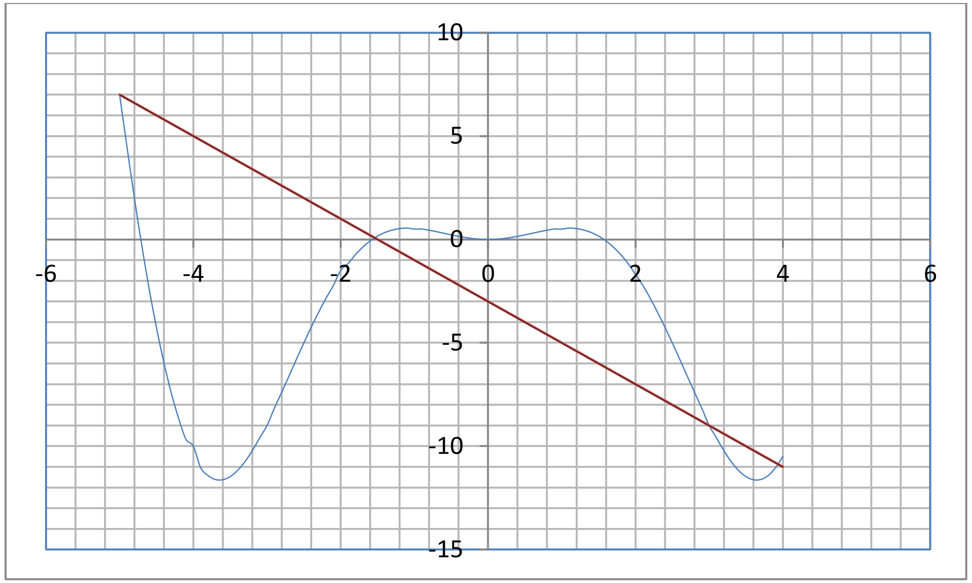
(a) $f(x) = 0$ (c) $f(x) = g(x)$
(b) $f(x) \leq 4$ (d) $f(x) \geq g(x)$



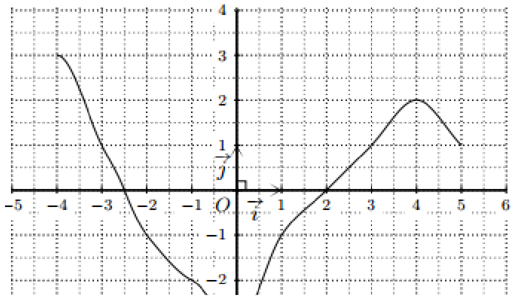
Partie 4 :

Soit la fonction g, dont la représentation graphique est donnée ci-dessous (courbe bleue) :

1) Dresser le tableau de variations de la fonction g.
Soit la fonction k, représentée par la droite rouge.
2) Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :
a) g(x) > k(x) b) g(x) = k(x) c) h(x) < g(x) < k(x)
d) g(x) ≤ h(x) e) k(x) = h(x) f) g(x) ≥ 4



Partie 5 :



3) Soit la fonction t, dont la courbe représentative est donnée ci-contre

a) Quel est l'ensemble de définition de t ?

b) Déterminer l'image de 3 par la fonction t.

c) Combien vaut t(0) ?

d) Déterminer un (ou des antécédents) de 2 par la fonction t.

e) Dresser le tableau de variations de t

f) Quel est le maximum de t ? le minimum ?

g) Résoudre graphiquement :

$t(x) \leq -1$ $t(x) > 0$ $t(x) = -1$

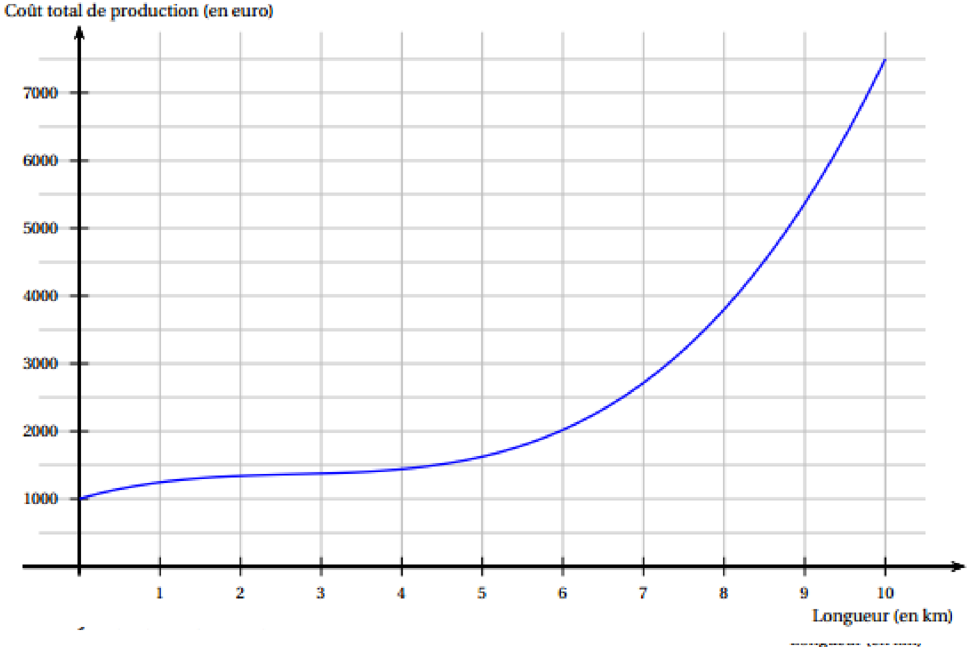
Exercice 17 (Problème concret) :

Partie 1 :

Une entreprise produit et vend un tissu en coton de forme rectangulaire de 1 mètre de large ; on note x sa longueur exprimée en kilomètre, x étant un nombre compris entre 0 et 10.
Le coût total de production en euro de ce tissu est donné, en fonction de x, par :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 350x + 1000.$$

La courbe de la fonction C est représentée sur le graphique ci-dessous.



Partie A : Étude du coût total

1. Déterminer le montant des coûts fixes.
2. **a.** Déterminer, par lecture graphique, le montant du coût total lorsque l'entreprise produit 6 km de tissu.
   b. Déterminer par un calcul sa valeur exacte.
3. Déterminer graphiquement la longueur, arrondie au kilomètre, de tissu produit lorsque le coût total s'élève à 5 500 €.

Partie B : Étude du bénéfice

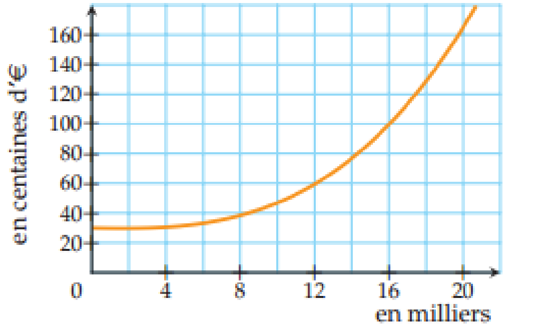
Le cours du marché offre un prix de 530 € le kilomètre de tissu fabriqué par l'entreprise.
Pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$, on note $R(x)$ la recette et $B(x)$ le bénéfice générés par la production et la vente de x kilomètres de tissu par l'entreprise.

On pourra utiliser la calculatrice pour cette partie

1. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
2. Montrer que pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$, $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 1000$.
3. **a.** Pour quelle longueur de tissu produit et vendu l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal ?
   b. Donner alors la valeur de ce bénéfice maximal.

Partie 2 :

L'entreprise Flora commercialise des vases en porcelaine. Par an, elle confectionne entre 0 et 20 000 vases. Le coût total de production f, exprimé en centaines d'euros, est fonction du nombre de vases fabriqués, en milliers. Le graphique ci-dessous présente la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f.



1) a) Quel est le coût de production de 10 000 vases ?
   b) Quelle quantité maximale d'objets est-il possible de produire pour un coût inférieur à 14 000 € ?

2) Le coût moyen h est donné par $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
   a) Estimer $h(5)$.
   b) Reproduire la courbe $\mathcal{C}$ puis tracer, dans le même repère, la représentation graphique du coût moyen.
   c) Estimer le nombre de vases qu'il faut fabriquer pour obtenir un coût moyen minimal.

Partie 3 :

1) Jean décide d'acheter la carte fidélité d'un cinéma. La carte lui coûte 30 € et lui permet de voir autant de films qu'il le souhaite à un tarif de 4 € par film. On note f la fonction représentant le coût total de ses sorties cinéma. On note x, le prix d'une place de cinéma.

a) Déterminer l'expression de f en fonction de x.

b) Quel est l'ensemble de définition de f ?

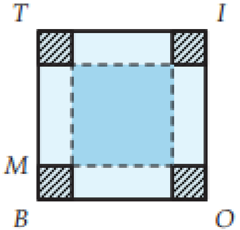
c) Combien va-t-il dépenser si il décide d'aller voir 10 films dans l'année ?

d) Combien de films peut-il voir avec 200 € ?

Exercice 18 (Problème géométrique) :

Partie 1 :

On considère un carré de côté 15 cm. Dans chaque coin, on découpe un même carré pour obtenir un patron d'une boîte sans couvercle.



Partie A : un patron

1) Construire une boîte en choisissant $BM = 3$ cm.

2) Calculer son volume.

3) Peut-on réaliser une boîte sachant que $BM = 8$ cm ? Expliquer.

Partie B : une fonction

On pose $BM = x$ et on appelle $\mathcal{V}$ la fonction qui à x associe le volume de la boîte sans couvercle.

1) Déterminer une expression de la fonction $\mathcal{V}$.

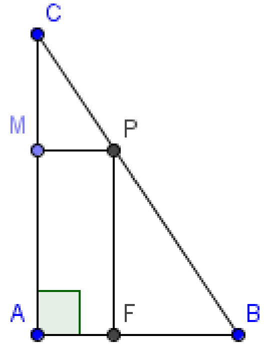
2) Quel est l'ensemble de définition de $\mathcal{V}$?

3) À l'aide de votre calculatrice ou d'un logiciel, tracer la courbe représentative de la fonction $\mathcal{V}$.

4) Pour quelles valeurs de x le volume est-il supérieur ou égal à 100 ?

5) Le volume de cette boîte peut-il dépasser 1 dL ? Si oui, donner les dimensions d'une boîte vérifiant cette condition. Si non, expliquer pourquoi.

Partie 2 :



Soit le triangle ABC rectangle en A. On a AB = 3 cm ; AC = 4 cm et BC = 5 cm. On considère le point M situé sur le segment [AC]. On pose AM = x. P appartient au segment [BC] et F au segment [AB]. MPFA est un rectangle.

a) Déterminer l'expression de PM en fonction de x.

b) En déduire l'aire A(x) de MPFA en fonction de x.

c) Quelle est l'ensemble de définition de la fonction A ?

d) Quelle est l'aire du rectangle si x = 2

e) En utilisant la calculatrice déterminer l'aire maximale que peut avoir le rectangle AMPF.

f) L'aire du rectangle peut-elle dépasser les 6 cm² ?

Exercice 19 (Vrai/faux) :

Partie 1 :

Voici le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-8;8]$.

x	-8		-2		1		8
$f(x)$	0	↗	4	↘	-3	↗	1

Pour chaque affirmation, dire qi elle est vraie ou fausse ou si l'on ne peut décider. Dans le dernier cas dire pourquoi.

1) La fonction f est croissante sur $[-8;8]$.

2) La fonction f est décroissante sur $[-8;1]$.

3) La fonction f est décroissante sur $[0;1]$.

4) La fonction f est croissante sur $[-8;-1]$.

5) $f(-4) \leqslant 4$.

6) $f(-7) = 1$.

7) $f(1) = -3$.

8) $f(0) = 5$.

9) $f(-7) \leqslant f(-3)$.

10) $f(-1) \leqslant f(0)$.

11) $f(4) \leqslant f(7)$.

12) $f(-5) \leqslant f(0)$.

13) $f(-3) = f(-1)$.