EXERCICES – SUCCESSION D'EPREUVES INDEPENDANTES – SCHEMA DE BERNOULLI

Exercice 1 (Rappels)

Partie 1 :

Sachant que $p(A) = 0{,}3$; $p(B) = 0{,}2$ et $p(A \cap B) = 0{,}1$. Calculer les probabilités suivantes :

1) $p(\bar{A})$ 2) $p(A \cup B)$ 2) $p(A \cup \bar{B})$

Partie 2 :

On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}1$ et $P(A \cap B) = 0{,}06$. Calculer $P_A(B)$.

On considère deux évènements C et D tels que $P(D) = 0{,}6$ et $P(C \cap \overline{D}) = 0{,}35$. Calculer $P_{\overline{D}}(C)$.

On considère deux évènements disjoints E et F de probabilités non nulles. Calculer $P_E(F)$.

On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}37$, $P(B) = 0{,}68$ et $P(A \cup B) = 0{,}84$. Calculer :

1) $P_A(B)$ 2) $P_B(A)$

On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}63$ et $P_A(B) = 0{,}06$. Calculer :

1) $P(A \cap B)$ 2) $P(A \cap \overline{B})$

On considère deux évènements E et F tels que $P(E) = \dfrac{1}{3}$ et $P_{\overline{E}}(F) = \dfrac{7}{12}$. Calculer :

1) $P(\overline{E} \cap F)$ 2) $P(\overline{E} \cap \overline{F})$

Partie 3 :

Dans un magasin de meubles, il y a 55 % de canapés dont 14 % en cuir, 30 % de fauteuils dont 20 % en cuir et le reste est constitué de poufs dont 42 % en cuir.
Un client se présente et choisit un meuble.
On considère les évènements :

- F : « le meuble choisi est un fauteuil » ;
- C : « le meuble choisi est en cuir ».

Montrer que ces deux évènements sont indépendants.

Partie 4 :

En 2008, les ateliers Ouest et Est d'une même entreprise produisent respectivement 1 100 et 900 pièces d'un unique modèle chaque jour.
On estime que 2 % de la production de l'atelier Ouest est défectueuse ainsi que 3 % de la production de l'atelier Est.

1. Compléter sur l'annexe à rendre avec la copie, le tableau suivant :

	Pièces défectueuses	Pièces non défectueuses	Total
Ouest	22		
Est			
Total			2 000

2. On prélève, au hasard, une pièce dans la production totale. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être prélevées.

a. On définit les évènements suivants :
— E : « la pièce prélevée est produite dans l'atelier Est »,
— D : « la pièce prélevée est défectueuse ».
On note $p(E)$ la probabilité de l'évènement E.
Calculer $p(E)$, $p(D)$, $p(E \cap D)$ puis $p(E \cup D)$.

b. On a prélevé au hasard une pièce dans la production de l'entreprise. Elle est défectueuse.
Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'atelier Ouest.

Partie 5 :

L'exploitant d'une forêt communale décide d'abattre des arbres afin de les vendre, soit aux habitants, soit à des entreprises. On admet que :

- parmi les arbres abattus, 30 % sont des chênes, 50 % sont des sapins et les autres sont des arbres d'essence secondaire (ce qui signifie qu'ils sont de moindre valeur) ;
- 45,9 % des chênes et 80 % des sapins abattus sont vendus aux habitants de la commune ;
- les trois quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises.

Parmi les arbres abattus, on en choisit un au hasard.
On considère les évènements suivants :

- C : « l'arbre abattu est un chêne » ;
- S : « l'arbre abattu est un sapin » ;
- E : « l'arbre abattu est un arbre d'essence secondaire » ;
- H : « l'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune ».

1. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.

2. Calculer la probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune.

3. Justifier que la probabilité que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune est égale à 0,587 7.

4. Quelle est la probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.

Partie 6 :

Une urne contient douze boules. Six boules sont vertes, cinq sont rouges et une est blanche.
On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne (cad : on ne remet pas la boule dans l'urne après le premier tirage).
Si on tire une boule rouge, on gagne 1 euro
Si on tire une boule verte, on perd 3 euros.
Si on tire une boule blanche, on gagne 10 euros.
On note G la variable aléatoire qui associe à ce tirage le gain algébrique du joueur.
1) Déterminer la loi de probabilité de G.
2) Calculer l'espérance de G.
3) Le jeu est-il équitable ?

Exercice 2 (Justifier l'utilisation de la loi binomiale)

Partie 1 :

Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.
On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

Partie 2 :

80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à $0,02192$.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Partie 3 :

On suppose dans cette partie que la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme est égale à $0,9$.
Soit X la variable aléatoire, qui à tout échantillon de 10 pièces associe le nombre de pièces conformes.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

Partie 4 :

Les pièces produites par l'entreprise sont livrées par lots de 20.
On note D l'évènement : « une pièce prélevée au hasard dans la production n'est pas conforme ».
On suppose que $P(D) = 0,02$.
On prélève au hasard 20 pièces dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à un lot de 20 pièces, associe le nombre de pièces non conformes qu'il contient.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 20 et $0,02$.

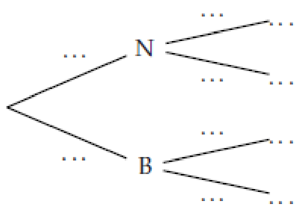
Exercice 3 (Représenter la situation par un arbre)

Partie 1 :

Chaque jour, Natacha et Ben tirent au sort pour savoir qui va faire la vaisselle.
Pour cela, ils lancent une pièce :
- si le résultat est « Pile », Natacha fait la vaisselle ;
- sinon, c'est Ben qui fait la vaisselle.

Natacha a fourni la pièce en question : cette dernière a une probabilité de $\frac{2}{3}$ de tomber sur « Face ».
On s'intéresse à la répartition des tours de vaisselle durant quatre jours.

1) Expliquer pourquoi l'on peut considérer que chaque lancer de pièce est indépendant du précédent.
2) On a tracé le début de l'arbre représentant la situation ci-dessous. Le recopier et le compléter pour qu'il représente la situation sur les quatre jours.



3) Déterminer la probabilité que seule Natacha ait fait la vaisselle durant ces quatre jours.
4) Déterminer la probabilité qu'il y ait eu une juste répartition des tâches durant ces quatre jours.

Partie 2 :

Le bus que Laure doit emprunter pour se rendre au lycée doit passer par deux feux.

Chacun de ces feux fonctionne de la manière suivante, chaque minute, il reste :

- 36 secondes au vert ;
- 3 secondes à l'orange ;
- 21 secondes au rouge.

On suppose que les deux feux fonctionnent de manière indépendante.

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.
2) Quelle est la probabilité que le bus rencontre deux feux verts ?
3) Quelle est la probabilité que les deux feux rencontrés soient de la même couleur ?
4) On suppose que le bus s'arrête systématiquement lorsque le feu passe à l'orange.
Quelle est la probabilité qu'il soit obligé de s'arrêter au moins une fois ?
5) À chaque feu rouge ou orange, lorsque le bus s'arrête, cela lui fait perdre 20 secondes.
   a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le temps perdu à ces deux feux.
   b) En moyenne, combien de temps Laure perd-elle à cause des feux ?

Exercice 4 (Calculer une probabilité)

Partie 1 :

On note E l'évènement « un sac prélevé au hasard dans une grosse livraison pour une municipalité n'a pas de défaut ». On suppose que la probabilité de E est 0,97. On prélève au hasard 10 sacs de cette livraison pour vérification. La livraison est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 sacs. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 sacs, associe le nombre de sacs sans défaut de ce prélèvement.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2) Calculer la probabilité que tous les sacs soient sans défaut.
3) Calculer la probabilité qu'au moins un sac soit sans défaut
4) Calculer la probabilité qu'il y ait entre 5 et 8 sacs sans défaut

Partie 2 :

On note X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(20,\ 0{,}7)$

Calculer :

1) $p(X=4)$ 2) $p(X \geq 14)$ 3) $p(X<7)$ 4) $p(2 \leq X \leq 5)$

Partie 3 :

On note X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(30,\ 0{,}4)$

Calculer :

1) $p(X=0)$ 2) $p(X \leq 25)$ 3) $p(X>14)$ 4) $p(4 \leq X \leq 10)$

Partie 4 :

On s'intéresse à la rentabilité énergétique d'un parc d'éoliennes dans une région.
Les relevés météorologiques sur une année montrent que la probabilité d'avoir des conditions optimales de fonctionnement de ce parc est de 0,45.
On admettra que les conditions météorologiques sont indépendantes d'une année sur l'autre.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'années pour lesquelles ces conditions optimales de fonctionnement sont réunies sur une période de 10 ans.
Tous les résultats numériques seront arrondis à 10^{-3} *près.*

1. Justifier que la loi de probabilité de X est la loi binomiale
2. Calculer la probabilité pour que les conditions optimales de fonctionnement de ce parc ne soient jamais atteintes durant cette période.
3. Calculer la probabilité pour que les conditions optimales de fonctionnement de ce parc soient atteintes au moins deux années durant cette période.

Exercice 5 (Calcul d'espérance et interprétation)

Partie 1 :

Un ascenseur tombe en panne avec une probabilité de 0,015 chaque jour et une réparation coûte 500 euros.

On suppose que la panne (ou non) de l'ascenseur est indépendante de celles des jours précédents.

1) Quelle est la probabilité que l'ascenseur tombe exactement une fois en panne durant le mois de janvier ?
2) En moyenne, combien peut-on prévoir de dépenses de réparation pour une année ?

Partie 2 :

Une tombola est organisée dans une école.

La directrice de l'école affirme qu'un billet sur trois est gagnant.

1) Bob a acheté quatre billets et il annonce qu'il est sûr de gagner.

On admet que l'achat de ces quatre billets est assimilable à un tirage avec remise et on note X le nombre de billets gagnants parmi les quatre.

a) Déterminer la probabilité que ses quatre billets soient gagnants.

b) Déterminer la probabilité qu'aucun de ses billets ne soit gagnant.

2) Combien de parties peut-il espérer gagner ?

Partie 3 :

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à $0,03$.

On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Quelle est la probabilité de l'évènement « au moins un sac est défectueux » ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.

c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

Partie 4 :

Une urne contient 10 boules, indiscernables au toucher : 4 boules sont rouges et les autres sont noires. On tire successivement, avec remise, 6 boules de l'urne. Quel nombre moyen de boules rouges peut-on espérer ? Avec quelle variance et quel écart type.

Exercice 6 (Calcul de seuil)

Partie 1 :

Pour équiper une de ses serres en système d'arrosage « goutte à goutte », une personne prend des renseignements concernant des goutteurs auprès d'un fournisseur de matériel de jardinage.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Les probabilités seront arrondies à 10^{-3} près si nécessaire.

La personne décide d'acheter 50 goutteurs.

On suppose le stock du fournisseur suffisamment important pour que le choix puisse être assimilé à un tirage successif avec remise.

On admet que la probabilité qu'un goutteur soit défectueux est égale à 0,023.

On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de goutteurs défectueux parmi les 50.

1. Justifier que la loi de probabilité de Y est binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,023$.

2) Déterminer l'intervalle [a , b] d'amplitude la plus petite possible que l'on peut obtenir avec une probabilité de 0,95

Partie 2 :

La compagnie Oui SNCF doit remplir un train de 180 places. Comme elle sait que le taux de défections habituel (indépendantes les unes des autres) des personnes ayant acheté un billet est de 8 %, elle décide de mettre plus de 180 billets en vente. On appelle n le nombre de billet mis en vente et X le nombre de passagers prenant réellement le train.

1) a) Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Déterminer l'espérance de X en fonction de n.

2) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le nombre de billets à vendre pour être sûr au seuil de 95 % de ne pas vendre trop de billets que ne peut contenir le train.

Partie 3 :

Dans une entreprise, 400 employés ont réservé un repas au self de l'entreprise. Les statistiques montrent que lorsqu'un employé a réservé, 6 % ne mange pas à la cantine. On appelle X le nombre de personnes mangeant réellement au self

1) a) Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Déterminer l'espérance et l'écart type de X.

2) Le gestionnaire du self ne voulant pas gâcher de nourriture souhaite savoir le nombre minimal k de repas à préparer tout en restant sûr à au moins 95 % que tous les employés se présentant auront un repas.

a) À l'aide de la calculatrice, déterminer k.

b) Même question avec un seuil de 99 %.

Partie 4 :

On estime que $12,7$ % des Français sont gauchers. On considère une classe de 35 élèves.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de gauchers dans la classe.

Le choix des élèves est assimilé à un tirage avec remise.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

2. Déterminer le plus petit nombre entier a tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant a) \geqslant 0{,}95$.

3. Dans la classe, il y a sept gauchers.
Cela est-il étonnant ?

Partie 5 :

Dans la bande-annonce du film *Markov Unchained*, il est indiqué que le taux de satisfaction des spectateurs s'élève à 92 %.
Un critique de films souhaite vérifier la véracité de cette affirmation. Pour cela, il interroge 200 personnes au hasard parmi celles qui ont visionné le film.
Si le taux de satisfaction est égal à 92 %, on peut supposer que la variable aléatoire X qui donne le nombre de spectateurs satisfaits par le film suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ avec $n = 200$ et $p = 0{,}92$.

1. Déterminer deux nombres entiers a et b tels que $\mathrm{P}(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b) \geqslant 0{,}95$ et que $b - a$ soit le plus petit possible.

2. Le résultat du sondage indique que 173 personnes ont apprécié le film. Peut-on remettre en cause le taux de satisfaction présenté dans la bande-annonce ? Justifier.

Exercice 7 (Algorithme)

Partie 1 :

Soit une variable X qui suit la loi binomiale de paramètres n = 40 et p = 055.

Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il détermine la valeur de k tel que p(X ≥ k) ≥ 0,95

```
def seuil(    ,   ):
    k=
    prob=(1-p)**n
    while prob<=1-alpha:
        k=
        prob=
    return( )
```

Partie 2 :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}7$.
Déterminer le plus petit nombre entier k tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant k) \geqslant 0{,}6$.

Ecrire un programme Python pour répondre à la question.

Exercice 8 (Synthèse)

Partie 1 :

Pour un groupe de n cobayes, au lieu d'analyser individuellement les échantillons sanguins, on applique la procédure dite de *group testing* suivante.

- Les échantillons sont prélevés puis une partie de chaque échantillon est mélangée avec les autres.
- Ce mélange est analysé.
- Si les résultats sont négatifs, aucun patient n'est malade. Sinon, on analyse individuellement chaque échantillon.

On cherche à trouver la valeur de n permettant de limiter au maximum le nombre de tests à faire.

1. Dans cette question, $n = 5$.
a. Si le résultat est négatif, combien de tests au total ont été réalisés ?
Même question si le résultat est positif.
b. On suppose à partir de maintenant que la probabilité qu'un patient soit malade est $p = 0{,}001$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tests réalisés.
Déterminer la loi de probabilité X.
c. En déduire le nombre moyen de tests et l'économie réalisée.
2. Reprendre les questions précédentes où n est un entier naturel quelconque.
3. On cherche à tester $\mathrm{N} = 110\,880$ patients.
Minimiser le nombre de tests à réaliser en déterminant la taille optimale du groupe n. On pourra supposer que n divise N.

Partie 2 :

Lors d'une course cyclosportive, 70% des participants sont licenciés dans un club, les autres ne sont pas licenciés.
Aucun participant n'abandonne la course.

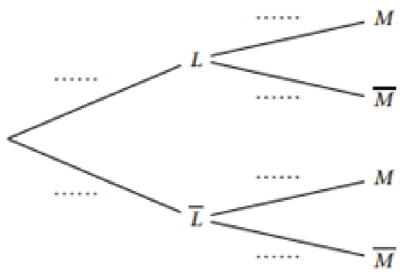
- Parmi les licenciés, 66% font le parcours en moins de 5 heures; les autres en plus de 5 heures.
- Parmi les non licenciés, 83% font le parcours en plus de 5 heures; les autres en moins de 5 heures.

On interroge au hasard un cycliste ayant participé à cette course et on note :

- L l'évènement « le cycliste est licencié dans un club » et $\overline{L}$ son évènement contraire,
- M l'évènement « le cycliste fait le parcours en moins de 5 heures » et $\overline{M}$ son évènement contraire.

1. À l'aide des données de l'énoncé préciser les valeurs de $P(L)$, $P_L(M)$ et $P_{\overline{L}}\left(\overline{M}\right)$.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant représentant la situation.



3. Calculer la probabilité que le cycliste interrogé soit licencié dans un club et ait réalisé le parcours en moins de 5 heures.

4. Justifier que $P(M) = 0{,}513$.

5. Un organisateur affirme qu'au moins 90% des cyclistes ayant fait le parcours en moins de 5 heures sont licenciés dans un club. A-t-il raison? Justifier la réponse.

6. Un journaliste interroge indépendamment dix cyclistes au hasard. On note X la variable aléatoire qui donne, parmi les dix cyclistes interrogés, le nombre de cyclistes ayant fait le parcours en moins de cinq heures. On suppose le nombre de cyclistes suffisamment important pour assimiler le choix de dix cyclistes à un tirage aléatoire avec remise.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

   b. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'exactement quatre des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures.

   c. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus trois des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures?

Partie 3 :

Un commerce possède un rayon « journaux » et un rayon « souvenirs ». À la fin d'une journée, on trie les pièces de monnaie contenues dans les caisses de chaque rayon.
On constate que la caisse du rayon « journaux » contient 3 fois plus de pièces de 1 € que celle du rayon « souvenirs ». Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face differe et symbolise un des pays utilisant la monnaie unique.
Ainsi, 40 % des pièces de 1 € dans la caisse du rayon « souvenirs » et 8 % de celle du rayon « journaux » portent une face symbolisant un pays autre que la France (on dira « face étrangère »).

1. Le propriétaire du magasin, collectionneur de monnaies, recherche les pièces portant une face étrangère. Pour cela il prélève au hasard et avec remise 20 pièces issues de la caisse « souvenirs ». On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement le nombre de pièces portant une face « étrangère ».

   a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.

   b. Calculer la probabilité qu'exactement 5 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.

   c. Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.

2. Les pièces de 1 € issues des deux caisses sont maintenant rassemblées dans un sac.
   On prélève au hasard une pièce du sac.
   On note S l'évènement « la pièce provient de la caisse souvenirs » et E l'évènement « la pièce porte une face étrangère ».

   a. Déterminer $P(S)$, $P_S(E)$; en déduire $P(S \cap E)$.

   b. Démontrer que la probabilité que la pièce porte une face étrangère est égale à 0,16.

   c. Sachant que cette pièce porte une face étrangère, déterminer la probabilité qu'elle provienne de la caisse « souvenirs ».

3. Dans la suite, la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans le sac porte une face étrangère est égale à 0,16.
   Le collectionneur prélève n pièces (n entier supérieur ou égal à 2) du sac au hasard et avec remise.
   Calculer n pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une pièce portant une face étrangère soit supérieure ou égale à 0,9.

Partie 4 :

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?
2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
   - « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle [1 ; 50]
   - l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Traitement	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$ Début du tant que $a :=$ rand(1, 50) ; $b :=$ rand(1, 50) ; $c :=$ rand(1, 50) ; $d :=$ rand(1, 50) ; $e :=$ rand(1, 50) Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

   a. Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
   $L_1 = \{2 ; 11 ; 44 ; 2 ; 15\}$; $L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\}$;
   $L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}$; $L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}$?

   b. Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

3. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à 0, 1.
4. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

   a. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

   b. On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des évènements suivants :
   - il a été contrôlé 5 fois exactement ;
   - il n'a pas été contrôlé ;
   - il a été contrôlé au moins une fois.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle T l'évènement : « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que $P(T) = 0,05$.
On appelle D l'évènement : « le coureur est dopé ».
Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :

- si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas ;
- si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

1. Calculer $P(D)$.
2. Un coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?

Partie 5 :

Sur cette ligne, la compagnie affrète un appareil de 200 places et a vendu 202 réservations.
On suppose que le nombre de clients se présentant à l'embarquement peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 202$ et $p = 0{,}971$.

1. Calculer la probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement.
2. Calculer la probabilité qu'un seul client parmi les 202 qui ont réservé ne se présente pas à l'embarquement.
3. En déduire la probabilité que la compagnie se trouve en situation de surréservation (c'est-à-dire avec plus de clients qui se présentent à l'embarquement que de places).

Partie 6 :

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k+3$ boules sont indiscernables au toucher.
Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :
- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$.
Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ail tiré deux boules de couleurs différentes.
   Démontrer que $p = 0{,}42$.
2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.
   On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.
   a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
   b. Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.
   c. Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Partie 7 :

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.
On note p_n, la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n-ième tirage.

1. Calculer les probabilités p_2, p_3 et p_4.
2. On considère les évènements suivants :
   B_n : « On tire une boule blanche lors du n-ième tirage »,
   U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».
   a. Calculer la probabilité de l'évènement B_n.
   b. Exprimer la probabilit de l'évènement U_n en fonction de n.
   c. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité :
   $$p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.
   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
   b. Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice 9 (QCM)

Partie 1 :

Une urne contient 5 boules bleues et 3 boules grises indiscernables au toucher.
On tire successivement de manière indépendante 5 boules avec remise dans cette urne. On note alors X la variable aléatoire comptant le nombre de boules grises tirées.
On note $E(X)$ l'espérance de X. On a alors :

a. $E(X) = 3$

b. $E(X) = \frac{3}{8}$

c. $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}905$ à 10^{-3} près

d. $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}095$ à 10^{-3} près

Partie 2 :

Esteban va à l'école chaque matin avec une trousse. À la fin de la journée, il oublie sa trousse avec une probabilité de 0,2. Dans l'année le nombre de jours d'école est de 162.
On considère que les oublis journaliers sont indépendants les uns des autres.
La probabilité qu'il oublie sa trousse 30 fois exactement dans l'année est environ :

a. 0,19 b. 0,07 c. 0,60 d. 0,36

Partie 3 :

Soit X la variable aléatoire distribuée selon la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0,08$.

1. $P(X = 0)$ est égale à

   ☐ $0,08^0$ ☐ $0,08^{25}$ ☐ $0,92^{25}$

2. Une valeur approchée de $P(X = 4)$ à 10^{-2} près est

   ☐ 0,72 ☐ 0,09 ☐ 0,95

3. Une valeur approchée de $P(X \leqslant 5)$ à 10^{-2} près est

   ☐ 0,03 ☐ 0,99 ☐ 0,66

4. E(X) est égale à

   ☐ 2 ☐ 0,08 ☐ 1,36

Partie 4 :

Pour tout évènement E, on note $P(E)$ sa probabilité. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,3$.

a. $P(X = 3) = 120 \times 0,3^2 \times 0,78$

b. $P(X = 3) = 12 \times 0,3^3 \times 0,7^7$

c. $P(X \geqslant 1) \approx 0,972$

d. L'espérance de X est $5,15$.

Partie 5 :

Pour la fête du village de Boisjoli, le maire a invité les enfants des villages voisins.
Les services de la mairie ayant géré les inscriptions dénombrent 400 enfants à cette fête ; ils indiquent aussi que 32 % des enfants présents sont des enfants qui habitent le village de Boisjoli.

1. Le nombre d'enfants issus des villages voisins est :

   a. 128 **b.** 272 **c.** 303 **d.** 368

   Lors de cette fête, huit enfants sont choisis au hasard afin de former une équipe qui participera à un défi sportif. On admet que le nombre d'enfants est suffisamment grand pour que cette situation puisse être assimilée à un tirage au hasard avec remise.
   On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre d'enfants de l'équipe habitant le village de Boisjoli.

2. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres :

   a. $n = 400$ et $p = 0,32$ **b.** $n = 8$ et $p = 0,32$
   c. $n = 400$ et $p = 8$ **d.** $n = 8$ et $p = 0,68$

Partie 6 :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\ ;\ 0,6)$.
La probabilité qui admet pour valeur approchée 0,012 est :

a. $p(X = 2)$ **b.** $p(X \geqslant 2)$ **c.** $p(X \leqslant 2)$ **d.** $p(X < 2)$

Partie 7 :

3. La probabilité que dans l'équipe il y ait au moins un enfant habitant le village de Boisjoli est :

   a. 0,125 **b.** 0,875 **c.** 0,954 **d.** 1

4. L'espérance mathématique de X est :

   a. 1,740 8 **b.** 2,56 **c.** 87,04 **d.** 128

Exercice 10 (Vrai/faux)

Affirmation 1 :

Une urne contient au total n boules dont cinq sont blanches et les autres noires.
On effectue 10 tirages successifs indépendants en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.
Affirmation
La plus petite valeur de l'entier n, pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins une boule noire sur les 10 tirages est supérieure ou égale à 0,999 9, est égale à 13.

Affirmation 2 :

Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence).

Proposition 1 : « La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$. »

Affirmation 3 :

Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 100 et $\frac{1}{3}$, alors $P(X \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{100}$.