**EXPRESSIONS ALGEBRIQUES – EQUATIONS - INEQUATIONS**

**Expression littérale :** une expression qui contient au moins une lettre (souvent x) qui désigne un nombre d’un ensemble donné dont on ne connaît pas la valeur. Cette lettre est la **variable** de l’expression.

**Les bases :**

Opposé : $x$ a pour opposé $–x$

*Pour une expression algébrique* $3x+4$ *l’opposé est* $–(3x+4)$

Inverse : $x$ a pour inverse $\frac{1}{x}$

*Pour une expression algébrique* $3x+4$ *l’inverse est* $\frac{1}{3x+4}$

Réduire un produit : $x$ et y désignent des réels et n un entier naturel

$1) x×x=x²$ $2) x×x^{n}=x^{n+1}$

$3) 2×x=2x$ (On peut supprimer le signe × entre une lettre et un nombre)

$4) y×x=xy$ (On peut supprimer le signe × entre deux lettres)

$5) 2×(x+3)=2(x+3)$ $x×(x+3)=x(x+3)$

(On peut supprimer le signe × entre une expression algébrique et un nombre ou lettre)

6) $\left(2x+4\right)×\left(3x-2\right)=\left(2x+4\right)(3x-2)$

(On peut supprimer le signe × entre deux parenthèses)

7) $0×x=0x=0$ et $1×x=1x=x$

8) a et b sont des nombres connues ; $x$ et $y$ sont inconnues.

$$ax×bx=a×x×b×x=\left(a×b\right)×\left(x×x\right)=abx²$$

$$ax×b=a×x×b=abx$$

*Ex :* $3x×2x=\left(3×2\right)x²=6x²$$3×2x=\left(3×2\right)×x=6x$

La multiplication étant associative et commutative, on peut déplacer les facteurs à l’intérieur d’une succession de plusieurs produit afin d’effectuer les opérations dans l’ordre qui nous arrangent (pour appliquer les règles 1 à 6)

Réduire une somme : $x$ et y désignent des variables réelles et a et b des nombres réels

On additionne (ou soustrait) les « x » avec les « x », les « x² » avec les « « x² », les « machin » avec les « machin »….

1) $ax+bx=\left(a+b\right)x$ 2) $ax²+bx²=\left(a+b\right)x²$

3)$ axy+bxy=\left(a+b\right)xy$

De même que pour la multiplication, l’addition est associative et commutative donc dans une suite d’addition, on peut faire les calculs dans l’ordre qui nous arrange.

4) $4x+3y-3xy+x²-2x+3x²=x²+3x²+4x-2x+3y-3xy=4x²+2x+3y-3xy$

Les parenthèses :

**Utilité :**

Parenthèses de « présentation » : Ce sont des parenthèses qui entourent un nombre isolé lié au fait que l’on ne peut pas écrire deux signes opératoires côte à côte ou sur une somme isolé d’autres opérations.

Ex : $3x×(-3)$ $\left(3x+2\right)+(2-4x)$

Elles ne changent rien au calcul.

Parenthèses « utiles » : Elles servent à modifier une priorité de calcul

Une puissance sur un produit/division/somme

*Ex :* $(3x)² $*;* $(\frac{3}{x})²$*; (2+x)²*

Une multiplication sur une addition

*Ex :* $3(x+2)$ $-\left(x+2\right)=-1×(x+2)$

**Suppression :**

1) Si une parenthèse est précédée d’un signe + (ou de rien) et n’est pas liée à d’autres expressions algébriques, on peut la supprimer sans changer les signes des termes situés à l’intérieur.

$$\left(3x+2\right)+\left(2-4x\right)=3x+2+2-4x$$

2) Si une parenthèse est précédée d’un signe - et n’est pas liée à d’autres expressions algébriques, on peut la supprimer à condition de changer les signes de tous les termes à l’intérieur de la parenthèse.

$$\left(3x+2\right)-\left(-2-4x+x²\right)=3x+2+2+4x-x²$$

3) Si une parenthèse est liée à une autre expression algébrique/nombre par une multiplication/division/puissance, il faut développer l’expression (voir la suite)

**Calcul littéral**

Développer : Transformer un produit en somme algébrique.

On applique les principes de la **distributivité** ou on reconnaît une **identité remarquable.**

**Distributivité :**

Simple : $a\left(b+c\right)=a×b+a×c$

Double :$\left(a+b\right)\left(c+d\right)=a×c+a×d+b×c+b×d$

Triple, quadruple … :Chaque terme de la parenthèse multiplie le terme de la parenthèse suivante.

Plus de deux parenthèses : On distribue la première parenthèse (ou nombre) sur la deuxième, puis ce résultat sur la suivante, etc…

$$a\left(b+c\right)\left(d+e\right)=\left(a×b+a×c\right)(d+e)$$

**Identités remarquables :**

$\left(a+b\right)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}$ **(forme 1)**

$\left(a-b\right)^{2}=a^{2}-2ab+b^{2}$ **(forme 2)**

$\left(a+b\right)\left(a-b\right)=a²-b²$ **(forme 3)**

Procédure du développement :

1. Distributivité ou application d’une identité remarquable
2. Réduire les produits
3. Réduire les sommes
4. Ordonner (ranger les puissances par ordre décroissant)

Factoriser : Transformer une somme algébrique en produit

On cherche un **facteur commun** ou on reconnaît une **identité remarquable.**

**Facteur commun :**

$$a×c+a×b=a×(c+b)$$

Sur plusieurs produits : $$a×c+a×b+a×d=a×(c+b+d)$$

**Identités remarquables :**

$a^{2}+2ab+b^{2}=\left(a+b\right)^{2}$ **(forme 1)**

$a^{2}-2ab+b^{2}=\left(a-b\right)^{2}$ **(forme 2)**

$a²-b²=\left(a+b\right)\left(a-b\right)$ **(forme 3)**

Procédure de la factorisation :

1. Facteur commun ou identité remarquable
2. Réduire les produits dans les parenthèses
3. Réduire les sommes dans les parenthèses
4. Ordonner dans les parenthèses

Fractions : Même règles que pour les nombres (A, C des réels/expressions algébriques et idem pour B et D mais différents de zéro)

$\frac{A}{B}=A×\frac{1}{B}$ *Ex :* $\frac{x}{3}=\frac{1}{3}x$ ou $\frac{3}{x}=3×\frac{1}{x}$

$-\frac{A}{B}=\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}$ *Ex :-* $-\frac{x+3}{2x+3}=\frac{-(x+3)}{2x+3}=\frac{-x-3}{2x+3}$ ou $\frac{1}{2-x}=\frac{1}{-(2-x)}=-\frac{1}{x-2}$

$\frac{A×C}{B×C}=\frac{A}{B}$ *Ex :* $\frac{4x+2}{2x+2}=\frac{2×(2x+1)}{2×(x+1)}=\frac{2x+1}{x+1}$

$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A×D+C×B}{B×D}$ En général, on ne développe pas le dénominateur.

*Ex :* $\frac{2}{2x+2}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{2×(x+2)}{\left(2x+2\right)×(x+1)}+\frac{\left(x+2\right)×(2x+2)}{\left(x+1\right)×(2x+2)}=\frac{2\left(x+2\right)+\left(x+2\right)(2x+2)}{\left(x+1\right)(2x+2)}$

$\frac{A}{B}×\frac{C}{D}=\frac{A×C}{B×D}$ *Ex :* $\frac{2}{3x+2}×\frac{x+2}{x+1}=\frac{2×(x+2)}{\left(3x+2\right)×(x+1)}$

$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{A}{B}÷\frac{C}{D}=\frac{A}{B}×\frac{D}{C}=\frac{A×D}{B×C}$ *Ex :* $\frac{\frac{2}{3x+2}}{\frac{x+2}{x+1}}=\frac{2}{3x+2}×\frac{x+1}{x+2}$

Racines : Même règles que pour les nombres (a et b peuvent être des expressions algébriques ou des réels sous condition d’existence)

1)$\sqrt{a×b}=\sqrt{a}×\sqrt{b}$ Notamment : $\sqrt{x}×\sqrt{x}=\sqrt{x²}=x$ pour x > 0

2)$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

*Ex :* $\frac{\sqrt{3x+2}}{\sqrt{4x-5}}=\sqrt{\frac{3x+2}{4x-5}}$

Puissances :

a ; b sont des réels ; m et p des entiers relatifs

$a^{p}×a^{m}=a^{p+m}$$(a^{p})^{m}=a^{m×p}\frac{1}{a^{m}}=a^{-m}$

$$(a×b)^{m}=a^{m}×b^{m} a^{0}=1 (\frac{a}{b})^{m}=\frac{a^{m}}{b^{m}}$$

$$a^{1}=a \frac{a^{m}}{a^{p}}=a^{m-p}$$

Attention pour les sommes, soustractions appliquer la distributivité ou les identités remarquables.

*Ex :* $\frac{x^{4}}{x²}=\frac{x²×x²}{x²}=x²$

**Egalités – Equations**

Une égalité n’est pas forcément vraie tout le temps.

Règles sur les égalités : Si on part de $a=b$

$a+k=b+k$ $a-k=b-k$ $a×k=b×k$

$\frac{a}{k}=\frac{b}{k}$ pour k différent de zéro ici

Résoudre une équation : trouver la ou les solutions pour laquelle l’équation est vraie.

Equation du premier degré avec a ≠ 0 et b des réels

Equation de la forme : $ax+b=0$ (une seule inconnue, que des « x » pas de puissances, racine, inverse etc… de x). Isoler « x » pour résoudre

$x=-\frac{b}{a}$ $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$ (ensemble solution)

Equation produit : Si on doit résoudre une équation qui n’est pas du premier degré, on met tous les termes du coté « gauche » et on cherche à factoriser.

Equation de la forme : $A\left(x\right)×B\left(x\right)=0$ avec $A\left(x\right)$ et $B\left(x\right)$ des expressions algébriques (parfois il peut y avoir plus de deux termes)

Résoudre $A\left(x\right)=0$ ou $B\left(x\right)=0$

Equation quotient : Si on doit résoudre une équation qui n’est pas du premier degré avec un x au dénominateur, on met tous les termes du coté « gauche » et on met tout au même dénominateur.

Equation de la forme : $\frac{A\left(x\right)}{B\left(x\right)}=0$ avec $A\left(x\right)$ et $B\left(x\right)$ des expressions algébriques (parfois il peut y avoir plus de deux termes)

Résoudre $A\left(x\right)=0$ et $B\left(x\right)\ne 0$

La solution de $B\left(x\right)\ne 0$ est une valeur interdite, une valeur qui ne peut pas être solution.

**Inégalités – Inéquations**

Règles sur les inégalités : Si on part de $a>b$ (peu importe le symbole)

$a+k>b+k$ $a-k>b-k$

Si $k>0$ alors $a×k>b×k$

Si $k<0$ alors $a×k<b×k$

Si $k>0$ alors $\frac{a}{k}>\frac{b}{k}$ pour k différent de zéro ici

Si $k<0$ alors $\frac{a}{k}<\frac{b}{k}$ pour k différent de zéro ici

Résoudre une inéquation : trouver la ou les solutions pour laquelle l’inéquation est vraie.

Inéquation du premier degré avec a ≠ 0 et b des réels

**Inéquation de la forme :** $ax+b>0$ (une seule inconnue, que des « x » pas de puissances, racine, inverse etc… de x). Isoler « x » pour résoudre.

Attention à la division/multiplication par un nombre négatif.

$S=un intervalle$ (ensemble solution)

**Tableau de signe :** Signe de $ax+b$ selon les valeurs de x.

|  |  |
| --- | --- |
| x | -∞ $ -\frac{b}{a}$ +∞ |
| Signe de ax+b |  Signe de -a 0 signe de a |

Inéquation produit : Si on doit résoudre une inéquation qui n’est pas du premier degré, on met tous les termes du coté « gauche » et on cherche à factoriser.

Inéquation de la forme : $A\left(x\right)×B\left(x\right)>0$ avec $A\left(x\right)$ et $B\left(x\right)$ des expressions algébriques (parfois il peut y avoir plus de deux termes)

Dans un même tableau, regrouper l’étude du signe de A(x) et B(x) et le produit des deux : règle des signes.

 $\left(+\right)  ×  \left(-\right) = \left(-\right)$ ; $\left(+\right)  ×  \left(+\right) = \left(+\right)$ ; $\left(-\right)  ×  \left(-\right) = \left(+\right).$

Conclure avec un intervalle

*Exemple :* $\left(3x+1\right)\left(2x-4\right)>0$

|  |  |
| --- | --- |
| x | -∞ $-\frac{1}{3}$ 2 +∞ |
| Signe de -2x+4$$a=-2<0$$ |  + + 0 - |
| Signe de 3x+1$$a=3>0$$ |  - 0 + + |
| Signe de(-2x+4)(3x+1) |  - 0 + 0 - |

$$S=]-\frac{1}{3};2[$$

Inéquation quotient : Si on doit résoudre une inéquation qui n’est pas du premier degré avec un x au dénominateur, on met tous les termes du coté « gauche » et on met tout au même dénominateur.

inéquation de la forme : $\frac{A\left(x\right)}{B\left(x\right)}>0$ avec $A\left(x\right)$ et $B\left(x\right)$ des expressions algébriques (parfois il peut y avoir plus de deux termes)

Dans un même tableau, regrouper l’étude du signe de A(x) et B(x) et le produit des deux : règle des signes. Conclure avec un intervalle. Attention à la valeur interdite.

*Exemple :* $\frac{-x-2}{2x+1}>0$

|  |  |
| --- | --- |
| x | -∞ -2 -1/2 +∞ |
| Signe de 2x+1$$a=2>0$$ |  - - 0 + |
| Signe de –x-2$$a=-1<0$$ |  + 0 - - |
| Signe de $\frac{-x-2}{2x+1}$ |  - 0 + || - |

*S = ]-2 ; -1/2[*

**Algorithme :**

Déterminer la première puissance d’un nombre positif donné supérieure ou inférieure à une valeur donnée.

A partir de quand an est plus grand que A

|  |  |
| --- | --- |
| **Langage naturel**  | **Python** |
| Saisir a ; An←1Tant que an ≤ An←n+1Fin TantqueRenvoyer(n) |  |

**Démonstration :**$ \left(a+b\right)^{2}=a²+2ab+b²$

**Méthodes (exercices) :**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Hachette** | **Hatier** | **Mes exos** | **Sesamaths** | **Mathx** |
| A) Développer | 28,31 | 61-65 | Ex 2 | 60-62 |  |
| B) Factoriser | 32,33,74 | 67-80 | Ex 3 | 63-65 |  |
| C) Manipuler des fractions |  | 41-56 | Ex. 4 | 66 |  |
| D) Manipuler des racines |  | - | Ex. 5 | - |  |
| E) Manipuler des puissances |  | 88 | Ex. 6 | - |  |
| F) Modéliser un problème par une (in)équation |  | 119-123,140-141 | Ex. 7 |  |  |
| G) Exprimer une variable en fonction d’une autre | 7, 18 | 102-105 | Ex. 8 | 76-77 |  |
| H) Résoudre une équation du premier degré | 8-10,13-15 | 106 | Ex. 9 | 67 |  |
| I) Résoudre une équation produit | 19-20,76 | 108-114 | Ex. 10 | 71 |  |
| J) Résoudre une équation quotient |  | 115-118 | Ex. 11 | 73 |  |
| K) Résoudre une inéquation du premier degré/tableau de signe | 11-12,56-57,60 | 131-139 | Ex. 12 | 68 |  |
| L) Résoudre une inéquation produit | 69 |  | Ex. 13 |  |  |
| M) Résoudre une inéquation quotient |  |  | Ex. 14 |  |  |
| N) Comparer deux quantités |  |  | Ex. 15 |  |  |

**Exercices de synthèse :**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Hachette** | **Hatier** | **Mes exos** | **Sesamaths** | **Mathx** |
| Algorithmes | 40 |  | Ex.16 |  |  |
| Forme la plus adaptée |  | 160-161,178-179 | Ex.17 | 75 |  |
| Problème concret | 58-59,63 |  | Ex .19 | 69 |  |
| Problème géométrie | 64,107,105,109 |  | Ex.19 | 69,74 |  |
| Synthèse | 112 |  | Ex.18 | 78 |  |
| QCM | 4-6 |  |  |  |  |
| Vrai/faux | 2,27,43,45 |  |  |  |  |
| Approfondissement |  | 182-186 |  |  |  |