METHODES A CONNAITRE – EXPRESSIONS ALGEBRIQUES

Problème A : Développer

Questions-types :
- *Développer* $A = (2x-3)(x+1) - (x-4)(3x+2) + (5x-3)^2$

Procédure :

1) Distributivité ou application d'une identité remarquable

Distributivité : $(a+b)(c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Identités remarquables :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (forme 1)

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (forme 2)

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (forme 3)

2) Réduire les produits
3) Réduire les sommes
4) Ordonner (ranger les puissances par ordre décroissant)

Exemples : Développer $\mathrm{A} = 2(2\mathrm{x}-3)(\mathrm{x}+1) - (\mathrm{x}-4)(3\mathrm{x}+2) + (5\mathrm{x}-3)^2$

A vous de jouer : Développer $\mathrm{A} = -(3\mathrm{x}+1)(2\mathrm{x}-4) + (2\mathrm{x}-7)(9\mathrm{x}+5) - (4\mathrm{x}+1)^2$

Problème B : Factoriser

Questions-types : - *Factoriser* $A = 2x + x^2$

Procédure :

1) Facteur commun ou identité remarquable

Facteur commun : $a \times c + a \times b = a \times (c+b)$

Identités remarquables :

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ (forme 1)

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ (forme 2)

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ (forme 3)

2) Réduire les produits dans les parenthèses
3) Réduire les sommes dans les parenthèses
4) Ordonner dans les parenthèses

Exemples : Factoriser $A = 2x + x^2$ et $B = 4x^2 - 9$ et $C = (2x-3)(4x+1) - (2x-3)(x+1)$

A vous de jouer : Factoriser $A = 2x^2 - 2x$ et $B = 9x^2 - 36$ et $C = (3x+2)(4x+1) + 2(x-3)(4x+1)$

Problème C : Manipuler des fractions

Questions-types : - *Mettre sous la forme d'une seule fraction* $\frac{2}{x+4} - \frac{3}{x+1}$

Procédure : Même règles que pour les nombres (A, C des réels/expressions algébriques et idem pour B et D mais différents de zéro)

$\frac{A}{B} = A \times \frac{1}{B}$ $\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}$ $\frac{A \times C}{B \times C} = \frac{A}{B}$ $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{A \times D + C \times B}}{\mathrm{B \times D}}$ $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \times \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{A \times C}}{\mathrm{B \times D}}$ $\frac{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}}{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \div \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \times \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}$

On ne développe pas le dénominateur

Exemples : Mettre sous la forme d'une seule fraction $A = \frac{2}{x+4} - \frac{3}{x+1}$. $B = \frac{x+3}{x+4} \times \frac{3}{x+5}$ $C = \frac{1}{x+4} \div \frac{3}{x+5}$

$$D = 3 - \frac{3}{x+1}$$

A vous de jouer : Mettre sous la forme d'une seule fraction $A = \frac{2}{x+5} - \frac{x+2}{x+1}$. $B = \frac{1}{x^2+1} \times \frac{-2}{x+5}$ $C = \frac{\frac{1}{x+4}}{\frac{3}{x+1}}$

$D = 2 - \frac{1}{x+7}$

Problème D : Manipuler des racines

Questions-types : -Montrer que : $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

Procédure :

Même règles que pour les nombres (a et b peuvent être des expressions algébriques ou des réels sous condition d'existence)

1)$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ Notamment : $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x^2} = x$ pour x > 0

2)$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemples : *Montrer que :* $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

A vous de jouer : Montrer que : $\sqrt{x} \times \sqrt{x+1} = \sqrt{x^2+x}$

Problème E : Manipuler des puissances

Questions-types : Montrer que $\frac{x^2}{x^4+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$

Procédure : On applique les règles :

a ; b sont des réels ; m et p des entiers relatifs

$a^p \times a^m = a^{p+m}$ $(a^p)^m = a^{m \times p}$ $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$

$(a \times b)^m = a^m \times b^m$ $a^0 = 1$ $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$

$a^1 = a$ $\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$

-

Exemples : Montrer que $\frac{x^2}{x^4+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$ et simplifier $\frac{x^3 \times (x^4)^2}{x^2 \times x}$

A vous de jouer : Montrer que $x^5 + x^3 = x^3(x^2+1)$ et simplifier $\frac{x^3 \times (x^4)^2}{x^2 \times x}$

Problème F : Modéliser un problème par une inéquation/équation

Questions-types : - Montrer que le problème revient à résoudre 3x+2 = 0

Procédure :

- Extraire toutes les données de l'énoncé
- Bien comprendre ce que représente l'inconnue et ce qu'elle doit vérifier. « les deux cotés de l'égalité »
- Fixer des valeurs arbitraires à l'inconnue pour essayer de comprendre le rôle de l'inconnue par rapport aux autres données de l'énoncé. Bien décomposer les étapes et les calculs que l'on fait.
- Généraliser ces calculs en remplaçant la valeur que l'on a prise par « x ». Faire un « programme » de calcul.
- Il faut souvent utiliser, en plus, des connaissances de cultures générales ou de géométrie : Aires des figures usuelles, Economie (prix unitaire d'un objet), Bénéfice, etc…

Exemples : On considère un rectangle ABCD avec AB = 2 cm² et BC= x. On cherche à savoir pour quelles valeurs de x, le périmètre du rectangle ABCD sera supérieure à 21 cm². Modéliser le problème par une inéquation.

A vous de jouer : Le prix d'un livre est de 3 €. Combien de livres peut on acheter au maximum avec un billet de 50 € ? Modéliser le problème par une inéquation.

Problème G : Exprimer une variable en fonction d'une autre

Questions-types : - Dans l'expression $\frac{A}{B} = C$; Exprimer B en fonction de A et C

Procédure :

- Isoler l'inconnue recherchée en la déplaçant ou en déplaçant les termes du même côté qu'elle. Pour cela on utilise les règles sur les égalités :

Règles sur les égalités : Si on part de $a = b$

$a + k = b + k$ $\quad$ $a - k = b - k$ $\quad$ $a \times k = b \times k$

$\frac{a}{k} = \frac{b}{k}$ pour k différent de zéro ici

Exemples : Isoler R : $U = RI$

A vous de jouer : Isoler R : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Problème H : Résoudre une équation du premier degré

Questions-types : - *Résoudre 3x+2 = 5x-7*

Procédure :

Résolution :

Résoudre une équation c'est trouver les valeurs de x qui vérifient l'égalité de l'équation.

1) Mettre tout ce qui n'est pas « x » à droite de l'égalité.
2) Mettre les « x » à gauche de l'égalité. (utiliser les règles sur l'égalité pour 1 et 2)

Règles sur les égalités : Si on part de $a = b$

$a + k = b + k$ $\quad$ $a - k = b - k$ $\quad$ $a \times k = b \times k$

$\frac{a}{k} = \frac{b}{k}$ pour k différent de zéro ici

3) Le but est d'avoir x = un nombre. Conclure S = {solution}

Un nombre est –il solution d'une équation ? :

On remplace « x » par ce nombre et on regarde si l'égalité est vérifiée.

Exemples : 3 est-il solution de *3x+2 = 5x-7* Résoudre cette équation.

A vous de jouer : 5 est-il solution de *-5x+1 = 3-2x* Résoudre cette équation.

Problème I : Résoudre une équation produit

Questions-types : - *Résoudre* $(3x-2)(5-x)=0$

Procédure :

1) On déplace tous les termes à gauche de l'égalité. (avoir un zéro à droite)

2) On chercher à factoriser le terme de gauche pour faire apparaître des expressions du premier degré

$$A(x) \times B(x) = 0$$

3) Résoudre les équations A(x)=0 ou B(x)=0

4) Conclure avec S = {solution}

Exemples : *Résoudre* $(3x-2)(4x+1)-(3x-2)(5-x)=0$ $\quad$ $(3x-2)(4x+1)=0$ $\quad$ $4x^2-1=0$

A vous de jouer : *Résoudre* $x^2-x=0$ $\quad$ $(4x-2)(5x+1)(3x+1)=0$ $\quad$ $36x^2-4=0$

Problème J : Résoudre une équation quotient

Questions-types : *Résoudre* $\frac{4}{x+2}=3$

Procédure :

1) On déplace tous les termes à gauche de l'égalité. (avoir un zéro à droite)

2) On écrit tous les termes de gauche sous la forme d'une seule fraction (mettre au même dénominateur).

Utiliser cette règle $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}+\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}=\frac{\mathrm{A}\times\mathrm{D}+\mathrm{C}\times\mathrm{B}}{\mathrm{B}\times\mathrm{D}}$ et on obtient $\frac{A(x)}{B(x)}=0$

4) Résoudre les équations A(x)=0 et B(x)=0 (les solutions de B(x) = 0 sont des valeurs interdites à exclure de l'ensemble des solutions)
5) Conclure S={solution}

Exemples : Résoudre $\frac{4}{x+2} = 3$ $\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+2} = 0$ $\frac{3x-7}{x+2} = 0$

A vous de jouer : Résoudre $\frac{1}{3x} = 2$ $\frac{1}{x+3} = \frac{2}{2x+1}$ $\frac{(3x+2)(4x-5)}{x+1} = 0$

Problème K : Résoudre une inéquation du premier degré/tableau de signes

Questions-types : - Résoudre $3x - 3 < 5x + 8$

Procédure :

Résoudre une inéquation du premier degré :

1) Mettre toutes les expressions avec des « x » à gauche et le reste à droite.

2) Réduire les deux cotés.

3) Diviser par le coefficient devant x et conclure sous la forme d'un intervalle.

Tableau de signe du premier degré :

1) Résoudre l'équation ax+b=0. On note x_0 la solution de l'équation.

2) Dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de ax+b	Signe de -a	0	signe de a

Exemples : Résoudre $3x - 3 < 5x + 8$ et dresser le tableau de signes de $5x + 8$

A vous de jouer : Résoudre $3 - 2x < 7x + 1$ et dresser le tableau de signes de $3 - 4x$

Problème L : Résoudre une inéquation produit

<u>*Questions-types :*</u> *Résoudre l'inéquation* $(3x-2)(5-x) \leq 0$

<u>Procédure :</u>

1) On déplace tous les termes à gauche de l'inégalité. (avoir un zéro à droite)

2) On chercher à factoriser le terme de gauche pour faire apparaître des expressions du premier degré.

$$A(x) \times B(x) > 0$$

3) Etudier le signe de A(x) puis le signe de B(x)

4) Regrouper les résultats dans un tableau de signes (exemple ci-dessous) : une ligne par facteur, et une ligne de conclusion que l'on complète avec la règle des signes

$(+) \times (-) = (-)$; $(+) \times (+) = (+)$; $(-) \times (-) = (+)$.

5) Conclure en lisant les solutions dans le tableau S = [intervalle]

<u>Exemples :</u> *Résoudre* $(3x-2)(4x+1)-(3x-2)(5-x) > 0$ $(3x-2)(4x+1) \leq 0$ $4x^2-1 \geq 0$

<u>A vous de jouer :</u> *Résoudre* $x^2 - x > 0$ $(4x-2)(5x+1)(3x+1) \leq 0$ $36x^2 - 4 > 0$

Problème M : Résoudre une inéquation quotient

<u>*Questions-types :*</u> *- Résoudre* $\frac{4}{x+2} < 3$

<u>Procédure :</u>

1) On déplace tous les termes à gauche de l'égalité. (avoir un zéro à droite)

2) On écrit tous les termes de gauche sous la forme d'une seule fraction (mettre au même dénominateur).

On obtient $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$

3) Etudier le signe de A(x) puis le signe de B(x)

4) Regrouper les résultats dans un tableau de signes (exemple ci-dessous) : une ligne par facteur, et une ligne de conclusion que l'on complète avec la règle des signes

$(+) \times (-) = (-)$; $(+) \times (+) = (+)$; $(-) \times (-) = (+)$.

Attention les valeurs pour lesquelles B(x) s'annule sont des valeurs interdites (mettre une double barre).

x	-∞ +∞	-2		-1/2	
Signe de 2x+1 $a = 2 > 0$	-		-	0	+
Signe de –x-2 $a = -1 < 0$	+	0	-		-
Signe de $\frac{-x-2}{2x+1}$	-	0	+	‖	-

5) On conclut : S = [un intervalle]

<u>Exemples :</u> Résoudre $\frac{4}{x+2} > 3$ $\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+2} \leq 0$ $\frac{3x-7}{x+2} \geq 0$

A vous de jouer : Résoudre $\frac{1}{3x} = 2$ $\frac{1}{x+3} = \frac{2}{2x+1}$ $\frac{(3x+2)(4x-5)}{x+1} = 0$

Problème N : Comparer deux quantités

Questions-types : - *Comparer* $A= \frac{3}{x+2}$ *et B= 4*

Procédure : Comparer A et B

Cas général :

1) On calcule A - B

2) On étudie le signe de A- B

3) On conclut que pour les réels x tels que A – B > 0 alors A > B

On conclut que pour les réels x tels que A – B < 0 alors A < B

On conclut que pour les réels x tels que A – B = 0 alors A = B

Si A et B sont positifs :

1) On étudie le signe de $\frac{A}{B} - 1$

2) On conclut que pour les réels x tels que $\frac{A}{B} - 1 > 0$ alors $\frac{A}{B} > 1$ alors A > B

On conclut que pour les réels x tels que $\frac{A}{B} - 1 < 0$ alors $\frac{A}{B} < 1$ alors A < B

On conclut que pour les réels x tels que $\frac{A}{B} - 1 = 0$ alors A = B

Exemples : *Comparer* $A= \frac{3}{x+2}$ *et B= 4*

A vous de jouer : *Comparer* $A= 3x + 2$ *et B= 4x-5*