EXERCICES – DENOMBREMENT

Exercice 1 (Modélisation)

Partie 1 :

Pour organiser le passage à l'oral de leur épreuve de langue, les élèves tirent au hasard trois cartons, un dans chacune des trois urnes.
La première urne contient les lettres « A », « B » et « C ».
La seconde urne contient les nombres « 25 » et « 27 ».
La dernière urne contient les mots « Matin » et « Après-midi ».

Quels sont les tirages possibles ?

Partie 2 :

On considère un établissement scolaire de 2 000 élèves, regroupant des collégiens et des lycéens.

- 19 % de l'effectif total est en classe Terminale ;
- parmi ces élèves de Terminale, 55 % sont des filles ;
- le taux de réussite au baccalauréat dans cet établissement est de 85 % ;
- parmi les candidats ayant échoué, la proportion des filles a été de $\frac{8}{19}$.

Déterminer le nombre de :

- Filles ayant réussi l'épreuve du bac
- Garçons ayant réussi l'épreuve du bac
- Filles n'ayant pas réussi l'épreuve du bac
- Garçons n'ayant pas réussi l'épreuve du bac

Partie 3 :

Lors d'une étude sur les voyages des lycéens en Europe, 363 élèves de seconde ont été interrogés sur leurs séjours en Espagne, Angleterre et Italie.
180 élèves ont séjourné en Espagne, 192 en Angleterre et 199 en Italie.
103 élèves ont séjourné au moins en Espagne et en Angleterre, 105 élèves ont séjourné au moins en Italie et en Angleterre, 123 élèves ont séjourné au moins en Espagne et en Italie.
De plus 73 élèves déclarent avoir séjourné dans les trois pays.

1. Construire un diagramme de Venn pour décrire la situation.
2. En vous aidant du diagramme, déterminer le nombre d'élèves :
   a) qui ont séjourné uniquement en Espagne.
   b) qui ont séjourné uniquement en Italie et en Angleterre.
   c) qui n'ont séjourné dans aucun de ces trois pays.

Exercice 2 (dénombrement)

Partie 1 :

Une course oppose 20 concurrents, dont Émile.

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier?
3. Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles?

Partie 2 :

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

1. sans imposer de contraintes sur les cartes.
2. contenant 5 carreaux ou 5 piques.
3. 2 carreaux et 3 piques.
4. au moins un roi.
5. au plus un roi.
6. 2 rois et 3 piques.

Partie 3 :

On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. si les livres doivent être groupés par matières.
2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Partie 4 :

Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, ANANAS.

Partie 5 :

1) De combien de façons peut-on ranger 3 paires de chaussettes différentes dans une commode à 5 tiroirs ? (au plus une pair par tiroir)
2) Combien de numéros de téléphones portables peut-on former ?
3) Quel est le nombre de tiercés pour une course de 15 chevaux ?

Partie 6 :

On désire former un jury composé de 2 scientifiques et de 3 littéraires. On peut choisir les membres du jury parmi 5 scientifiques et 7 littéraires. De combien de façon peut-on composer le jury dans les cas suivants :
1) N'importe quel jury et n'importe quel littéraire peuvent être choisi.
2) L'un des littéraires doit obligatoirement faire partie du jury.
3) Deux des scientifiques ne s'entendent pas et ne veulent pas faire partie du même jury.
4) Même question si ce sont deux littéraires qui ne s'entendent pas.

Partie 7 :

Un damier carré comporte quatre lignes et quatre colonnes. Ce damier est placé dans une position fixe. On se propose de placer quatre jetons indiscernables sur quatre cases différentes du damier.

1) Déterminer le nombre de dispositions possibles de ces quatre jetons sur le damier

2) Parmi celles-ci, dénombrer successivement celles qui répondent aux critères :

a) aucun des jetons n'est placé sur une diagonale

b) il y a un jeton sur une diagonale et deux sur l'autre

c) il y a exactement un jeton sur chaque ligne et chaque colonne.

d) aucune colonne ne contient exactement trois jetons.

Partie 8 :

Un appareil électronique envoie à une imprimante un code qui est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1 (par exemple : 1011).

1. **a.** Combien l'appareil peut-il fabriquer de codes distincts ?

Exercice 3 (Algorithme)

```
from math import*
def combinaison(n):
    L= []
    for i in range(1,n+1):
        L.append(factorial(n)/
                 (factorial(i)*factorial(n-i)))
    return(L)
```

Quelle est la valeur renvoyée par l'algorithme si l'utilisateur saisit la valeur n = 3 ?

Exercice 4 (Synthèse)

Partie 1 :

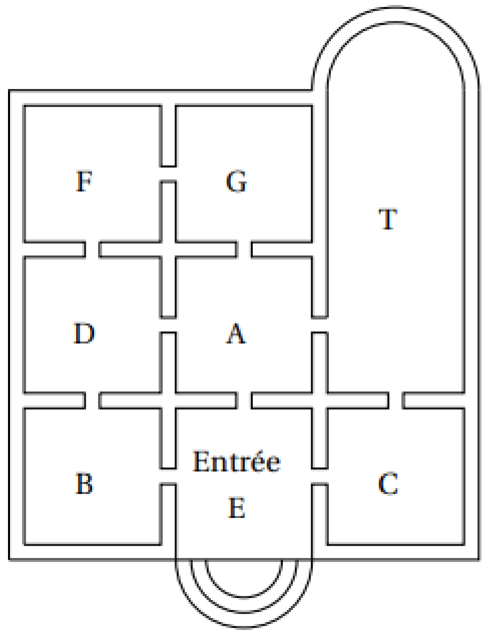
Le directeur d'un musée, dont le plan est fourni ci-dessous, organiseune exposition.

Afin de prévoir la fréquentation des salles, il décide d'imaginer le parcours d'un visiteur, pris au hasard, en faisant les hypothèses suivantes :

- Le visiteur passe *au hasard* d'une salle à une salle voisine.
- Pour sortir d'une salle, il franchit de manière équiprobable n'importe quelle autre porte que celle qu'il a utilisée pour entrer.

Dans le parcours du visiteur, le directeur ne s'intéresse qu'aux quatre premières salles traversées, l'entrée E étant comprise dans celles-ci. Un trajet par ces quatre premières salles est codé par un mot de quatre lettres, commençant par la lettre E. Par exemple :

- Si le visiteur passe successivement par les salles E, B, D, F, on codera son trajet par le mot EBDF.
- Le trajet codé EBDB est impossible avec les hypothèses choisies.



On considère un visiteur, pris au hasard, devant effectuer un trajet selon les hypothèses précédentes.

a. Construire l'arbre pondéré des différents trajets possibles pour ce visiteur.

b. Montrer que la probabilité du parcours codé EBDF est $\frac{1}{6}$.

c. Déterminer la probabilité p_1 de l'évènement : « La quatrième salle du trajet est F ».

d. Pour des raisons techniques, le directeur installe les œuvres les plus intéressantes dans la salle T. Déterminer la probabilité p_2 de l'évènement « Le trajet passe par la salle T ».

Partie 2 :

On considère l'ensemble E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Avec deux chiffres disfincts x et y de E on crée un unique domino simple noté indifféremment $\boxed{x \mid y}$ ou $\boxed{y \mid x}$. Avec un chiffre z de E, on forme un unique domino double noté $\boxed{z \mid z}$.

1. Montrer que l'on peut ainsi créer 36 dominos.

2. On tire au hasard un domino.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino constitué de chiffres pairs ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des chiffres est paire ?

3. On tire au hasard et simultanément deux dominos.

Un élève affirme : « la probabilité d'obtenir un domino double et un domino simple dont l'un des chiffres est celui du domino double est égale à $\frac{4}{45}$ ».

Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée*).

Exercice 7 (QCM)

Partie 1 :

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :
B_1, contenant 6 000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes,
B_2, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3 800 sont exactes.

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B_1. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

$$A : \frac{\binom{120}{3} + \binom{5880}{7}}{\binom{6000}{10}} \qquad B : \frac{3}{120}$$

$$C : \binom{10}{3} \times \left(\frac{120}{6000}\right)^3 \times \left(\frac{5880}{6000}\right)^7 \qquad D : \binom{10}{3} \times \left(\frac{3}{120}\right)^3 \times \left(\frac{7}{5880}\right)^7$$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :

$$A : 0,98 \qquad B : \frac{0,4 \times 0,95}{0,6 \times 0,98 + 0,6 \times 0,02} \qquad C : 0,6 \times 0,98 \qquad D : \frac{0,6 \times 0,98}{0,6 \times 0,98 + 0,4 \times 0,95}$$

Partie 2 :

Dans une trousse se trouvent un stylo bleu, deux blancs, quatre rouges indiscernables au toucher les uns des autres, on tire au hasard et simultanément trois de ces stylos.

48. Le nombre de tirages unicolores est égal à

- **a.** 1
- **b.** 2
- **c.** 4
- **d.** aucune des 3 réponses précédentes

49. Le nombre de tirages tricolores est égal à

- **a.** 7
- **b.** 8
- **c.** 9
- **d.** aucune des 3 réponses précédentes

50. Le nombre de tirages bicolores est égal à

- **a.** 23
- **b.** 24
- **c.** 25
- **d.** aucune des 3 réponses précédentes

51. Le nombre de tirages comportant plus de rouges que de blancs est égal à

- **a.** 35
- **b.** 22
- **c.** 19
- **d.** aucune des 3 réponses précédentes

Partie 3 :

1. On dispose de dix jetons numérotés de 1 à 10 et on en extrait simultanément trois pour former un « paquet ». Combien de « paquets » contenant au moins un jeton ayant un numéro pair peut-on ainsi former ?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
180	330	110

Partie 4 :

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies. 40 % des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français. Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :

   a. 0,4 **b.** 0,75 **c.** $\frac{1}{150}$

2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :

   a. 0,3 **b.** 0,8 **c.** 0,4

3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est

   a. 1,15 **b.** 0,4 **c.** 0,3

4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

   a. 0,9 **b.** 0,7 **c.** 0,475

5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :

   a. $\frac{4}{150}$ **b.** $\frac{12}{19}$ **c.** 0,3

Exercice 8 (Prise d'initiative)

Montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$