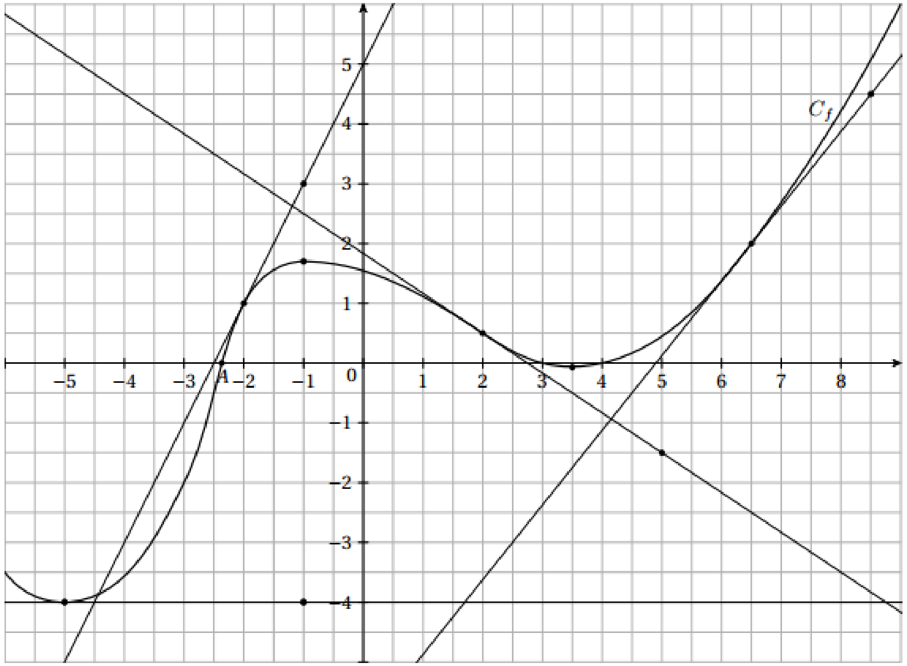
EXERCICES DERIVATION ET CONVEXITE

Exercice 1 (Révisions)

Partie 1 :

Voici la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $[-6;9]$ avec quatre de ses tangentes. Le point A de coordonnées $(-2,4;0)$, appartient à la courbe C_f



1. D'après le graphique, donner la valeur de $f(-2)$, puis les valeurs de $f'(-5)$, $f'(2)$ et $f'(6,5)$. Justifier soigneusement la réponse pour $f'(2)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 6, 5.
3. On sait que $f'(-3) = 2$; tracer T_{-3}, tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -3.

Partie2

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer l'équation de la tangente à la courbe en a. Représenter la fonction et sa tangente dans un repère orthonormé.

1) $f(x) = 2x - 4$ en a = - 2
2) $f(x) = x^2 - 2x + 4$ en a = 3
3) $f(x) = 3x^3 - 2x$ en a = 1
4) $f(x) = \frac{2x+3}{2x-1}$ en a = -4

Partie 3

Soit la fonction $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 1$ définie sur [-3 ; 2]

1) Calculer la dérivée de f, étudier son signe et en déduire le tableau de variations de f sur [-3 ; 2].
2) Encadrer f sur [-7/3 ; 1]
3) Déterminer le maximum et le minimum de f sur [-3 ; 2]. Pour quelle valeurs sont-ils atteints ?
4) Déterminer le signe de f sur [-3 ; -7/3]

Partie 4

Etudier, la position relative de la courbe C représentative de la fonction f et de la droite D représentative de la fonction g.

1) $f(x) = \frac{2}{x-4}$ et $g(x) = 3x + 1$
2) $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = -5x + 1$

Partie 5

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{3x+4}{9x+2}$ 2) $g(x) = \sqrt{4x - 2}$ 3) $h(x) = 3x^2 + 5$
4) $i(x) = \frac{2\sqrt{3x+10}}{4x-5}$ 5) $j(x) = x^3$ 6) $k(x) = \sqrt{2x - 8} - \sqrt{3x + 1}$
7) $l(x) = \frac{2}{3x+9} - \frac{5x}{2x+10}$ 8) $m(x) = -\frac{1}{\sqrt{3x^2+5x-1}}$

Exercice 2 (Calculs de dérivées)

Partie 1 :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3x + 1$
2) $f(x) = x^2 - 3x + 1$
3) $f(x) = x^3 - x$
4) $f(x) = \frac{3}{2x-1}$
5) $f(x) = x\sqrt{x}$
6) $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$
7) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$
8) $f(x) = \frac{2x^2+1}{3x-4}$
9) $f(x) = (3x + 1)\sqrt{x} + 3x$
10) $f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x - \sqrt{3}$
11) $f(x) = 2x^5 + \sqrt{x + 7}$
12) $f(x) = \frac{2}{(3x+1)^9}$
13) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{3x^2+2x-3}$
14) $f(x) = (2\sqrt{x} - 4)(3 - x)$
15) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 7}$
16) $f(x) = (4x - 7)^8$
17) $f(x) = e^{3x+1}$
18) $g(x) = 3e^{x^2-2x+1}$
19) $h(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$
20) $i(x) = (\sqrt{x} - 2)e^{2x+1}$
21) $j(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$
22) $k(x) = \frac{e^x}{x}$
23) $l(x) = e^{x^2} \times e^{2x}$
24) $m(x) = e^x + 2x - 4$

Partie 2 :

Déterminer l'ensemble de dérivabilité $\mathscr{D}'$ de chaque fonction et calculer sa dérivée sur $\mathscr{D}'$:

1) $f : x \mapsto \sqrt{3x-7}$ 4) $a : x \mapsto \left(1-2\sqrt{x}\right)^2$

2) $g : x \mapsto (5x^3-3)^2$ 5) $b : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$

3) $h : x \mapsto \dfrac{1}{(x+6)^3}$ 6) $c : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{10-x}}$

Partie 3 :

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la donnée de $f(x)$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Déterminer une expression de $f'(x)$.

1) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ 5) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$

2) $f(x) = \dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ 6) $f(x) = \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{3x+1}$

3) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+x}$ 7) $f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^x}$

4) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x+1}$ 8) $f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}$

Exercice 3 (Dérivée seconde)

Calculer la dérivée seconde des fonctions ci-dessous :

1) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 2) $f(x) = 2x^5 + x^2 - 4x + 2$

3) $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$ 4) $f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x - \sqrt{3}$

5) $f(x) = (2-3x)e^x$ 6) $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$

Exercice 4 (Etude de la convexité)

Partie 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$.

1°) Étudier la convexité de la fonction f.

2°) Déterminer l'équation de la tangente à C_f en son point d'inflexion.

Partie 2 :

Etablir la convexité des fonctions.

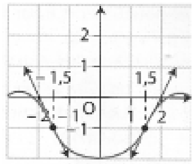
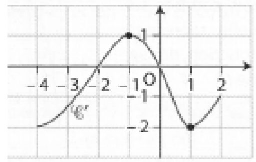
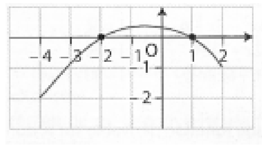
1) $f(x) = x - 2 + e^x$ 5) $f(x) = -4xe^x$

2) $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$ 6) $f(x) = (x-1)e^x$

3) $f(x) = e^{2x} - 2e^x - 3$ 7) $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$

4) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ 8) $f(x) = (2x-1)e^{-x}$

Partie 3 :

Courbe 1 Courbe 2 Courbe 3

1°) La courbe 1 ci-dessus est celle représentative d'une fonction f sur [-3;3]. Déterminer, par simple lecture graphique, la convexité de cette fonction f.

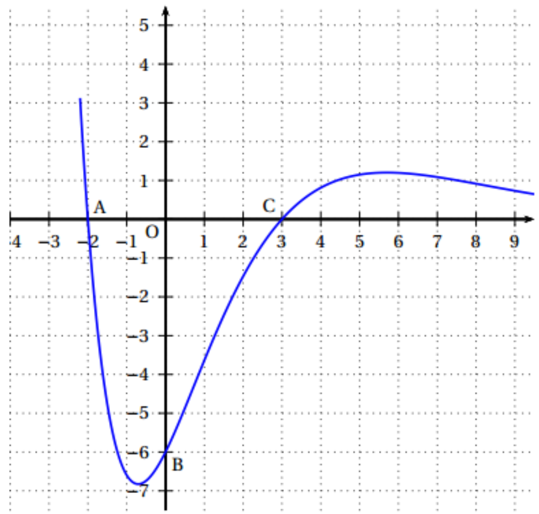
2°) On considère une fonction g dérivable sur [-4;2], dont la dérivée g' a pour représentation graphique la courbe 2 ci-dessus. Déterminer, par simple lecture graphique, la convexité de cette fonction g.

3°) On considère une fonction h deux fois dérivable sur [-4;2], dont la dérivée seconde h'' a pour représentation graphique la courbe 3 ci-dessus. Déterminer, par simple lecture graphique, la convexité de cette fonction h.

Partie 4 :

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé.

Les points suivants appartiennent à la courbe : A(−2 ; 0) ; B(0 ; −6) et C(3 ; 0).

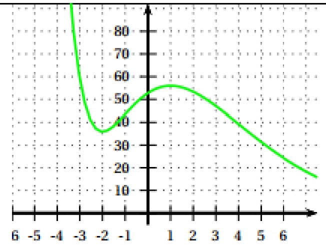
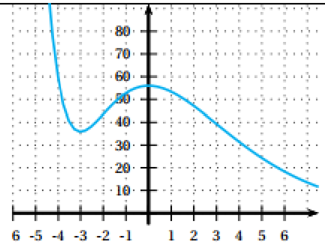


Courbe représentative de la fonction f''

Dans tout cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

1. La courbe représentative de f admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur $[-2 ; 3]$, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?

3. Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.

Courbe 1	Courbe 2
	

Exercice 5 (Etablir des inégalités avec la convexité)

Partie 1 :

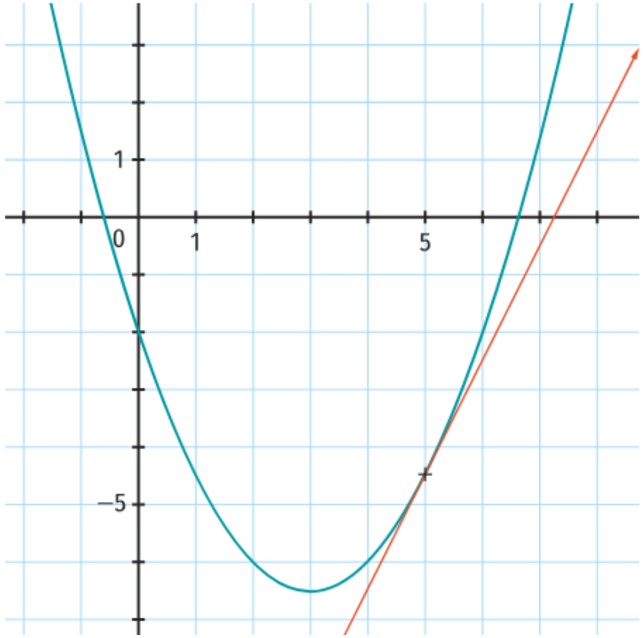
Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

1. Conjecturer graphiquement la convexité de f.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. En déduire que, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{x}\leqslant\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$.
4. En déduire que $\sqrt{2}\leqslant 1{,}5$.

Partie 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3x-2$.

Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est tracée dans le repère ci-dessous ainsi que sa tangente au point d'abscisse 5.



1. Déterminer graphiquement la convexité de f.
2. Déterminer par le calcul une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 5.
3. En déduire que, pour tout réel x, on a les inégalités $\dfrac{1}{2}x^2-3x-2\geqslant 2x-\dfrac{29}{2}$ et $x^2\geqslant 10x-25$.

Exercice 6 (allure de la courbe)

Partie 1 :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-5\,;4]$ telle que $f(-5)=0$ et $f(1)=0$.
On donne les tableaux de signes de la fonction dérivée f' et de la fonction dérivée seconde f'' de f.

x	-5		-3		1		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	-5		-1		4
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

Tracer, dans un repère orthogonal, une allure de la courbe représentative de la fonction f ainsi que les tangentes horizontales.

Partie 2 :

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-6\,;5]$ dont on connaît le tableau de variations de la fonction dérivée f'.

x	-6	-2	1	2	5
f'	4 ↘	0 ↗	2 ↘	0 ↘	-2

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[-6\,;5]$.
2. Déterminer la convexité de la fonction f.
3. Tracer, dans un repère, une allure de la courbe représentative de la fonction f ainsi que les tangentes horizontales.

Partie 3 :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-8\,;8]$ dont on connaît le tableau de variations de la fonction dérivée seconde f''.

x	-8	-2	1	4	8
f''	-2 ↗	0 ↘	-3 ↗	0 ↗	1

1. En déduire le signe de $f''(x)$ pour dresser le tableau de variations de la fonction dérivée f' sur $[-8\,;8]$.
2. En déduire la convexité de la fonction f et les abscisses des éventuels points d'inflexion.
3. Tracer, dans un repère, une allure de la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 7 (synthèse économie)

Partie 1 :

Un producteur de légumes souhaite s'implanter dans une commune et livrer directement chez le consommateu des paniers de 5 kg de légumes variés labélisés « bio ».

La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1 000 paniers par mois. Le coût total de production est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par

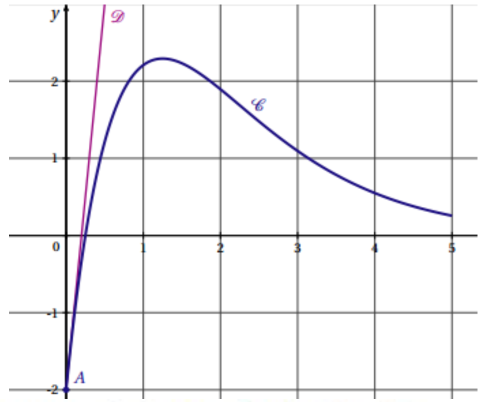
$$C(x) = -\frac{1}{48}x^4 + \frac{5}{16}x^3 + 5x + 10.$$

Lorsque x est exprimé en centaines de paniers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.
On admet que, pour tout nombre x de l'intervalle $[0\,;10]$, le coût marginal est donné par la fonction $C_m = C'$ où C' est la fonction dérivée de C.

1. Calculer $C_m(6)$, le coût marginal pour six cents paniers vendus.
2. On note C'' la fonction dérivée seconde de C et on a $C''(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{8}x$.
   (a) Déterminer le plus grand intervalle de la forme $[0\,;\,a]$ inclus dans $[0\,;10]$ sur lequel la fonction C est convexe.
   (b) Que peut-on dire du point d'abscisse a de la courbe de la fonction C ? Interpréter cette valeur de a en termes de coût.

Partie 2 :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ par $f(x) = (ax-2)\mathrm{e}^{-x}$, où a est un nombre réel.
On admet dans tout l'exercice que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O.



Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ passent toutes les deux par le point $A(0\,;\,-2)$.
La droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A et admet pour équation $y = 10x - 2$.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

2. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,5]$ on a :

$$f'(x) = (-ax + a + 2)\mathrm{e}^{-x}$$

b. Déduire des questions précédentes que $a = 8$.

c. Donner l'expression de $f'(x)$.

3. a. Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,5]$. On pourra faire un tableau.

b. En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.

c. Résoudre sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ l'équation $f(x) = 0$.

4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants :

1	$g(x) := (-8*x+10)*\exp(-x)$ $\rightarrow g(x) := (-8x+10)\mathrm{e}^{-x}$
2	Dériver $[g(x), x]$ $\rightarrow (8*x-18)*\exp(-x)$
3	Résoudre $[(8*x-18)*\exp(-x)>0, x]$ $\rightarrow x > 9/4$

En utilisant ces résultats :

a. Donner l'expression de f'', fonction dérivée seconde de la fonction f.

b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion dont on donnera la valeur exacte de l'abscisse.

5. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains (où x est un nombre réel de l'intervalle $[0\,;\,5]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par :

$$f(x) = (8x-2)\mathrm{e}^{-x}$$

a. Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal ?

b. Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal ?
On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.

Exercice 8 (synthèse)

Partie 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + x\mathrm{e}^{-x}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$

1. a. Déterminer f', la dérivée de f et f'' la dérivée seconde de f.

b. Étudier le sens de variation de f'.

c. En déduire que, pour tout réel x, $f'(x) > 0$.

d. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

e. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

f. En déduire que, pour tout $x \leqslant 2$, $f(x) \leqslant 2x + 1$.

2. On admet que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α.

a. Prouver que, sur $\mathbb{R}$, résoudre l'équation $f(x) = 2$ équivaut à résoudre $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = x$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction h définie sur $[0\,;\,1]$ par $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.

c. En déduire que, si x appartient à $[0\,;\,1]$, alors :

$$0 \leqslant h(x) \leqslant 1.$$

Partie 2 :

On considère la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{9x^2-24x+16}$. On note C la courbe représentative de f.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Donner, si possible, une interprétation géométrique de ces limites.
3) Etudier les variations de la fonction f.
4) Etudier la position relative de C par rapport à l'axe des abscisses.
5) Tracer les asymptotes et la courbe C dans un même repère.

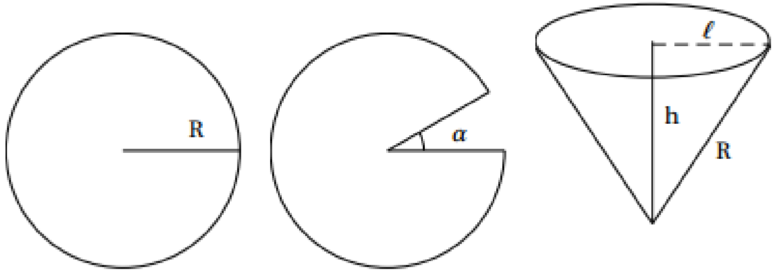
Partie 3 :

118. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-2}{(x^2+3x-10)^3}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer les fonctions u, v et w telles que :
$$f = u \circ v \circ w.$$
3. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
4. En déduire les équations des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.
5. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
6. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
7. Dans un repère, tracer les asymptotes trouvées à la question 4., puis la courbe $\mathscr{C}$.

Partie 4 :



Dans un disque en carton de rayon R, on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α radians. On superpose les bords afin de créer un cône de révolution. On souhaite choisir l'angle α pour obtenir un cône de volume maximal.

On appelle ℓ le rayon de la base circulaire de ce cône et h sa hauteur.
On rappelle que :

— le volume d'un cône de révolution de base un disque d'aire $\mathscr{A}$ et de hauteur h est $\frac{1}{3}\mathscr{A}h$.

— la longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle θ, exprimé en radians, est $r\theta$.

1. On choisit $R = 20$ cm.

   a. Montrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h, est $V(h) = \frac{1}{3}\pi\left(400 - h^2\right)h$.

   b. Justifier qu'il existe une valeur de h qui rend le volume du cône maximum. Donner cette valeur.

   c. Comment découper le disque en carton pour avoir un volume maximum ? Donner un arrondi de α au degré près.

2. L'angle α dépend-il du rayon R du disque en carton ?

Partie 5 :

Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2x + \mathrm{e}^a.$$

1. Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

Partie 6 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.
2. Justifier que pour tout x, $(\mathrm{e}^x - x)$ est strictement positif.

Partie B

1. **a.** Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   b. Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2. **a.** Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.

   b. Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

   b. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (T).

Partie 7 :

Justifier le tableau de variations de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$

x	-2		1		4
f′(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	3	↘	0

Partie 8 :

1) Soit f la fonction définie sur $[-1\,;\,3[$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{4(x+1)}{3-x}}$$

représentée par $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan.

a) Montrer que la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$x - y + 1 = 0.$$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}$.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2(3-x)^3$$

représentée par $\mathscr{C}_g$ dans un repère du plan.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$g'(x) = \frac{1}{4}x(6-5x)(x-3)^2.$$

b) Déterminer les points de $\mathscr{C}_g$ où ses tangentes sont horizontales.

c) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 9 (synthèse physique)

Partie 1 :

À l'instant $t = 0$, un parachutiste de 80 kg saute d'une altitude de 2 500 mètres avec une vitesse verticale de 1 mètre par seconde.

La distance en mètres d que parcourt le parachutiste pendant t secondes est donnée par la formule :

$$d(t) = 60t + C(\mathrm{e}^{-t} - 1)$$

où C est une constante qui dépend de la vitesse initiale.

La vitesse instantanée est donnée par $v(t) = d'(t)$.

1) Déterminer la valeur de C.

2) Déterminer une expression de $v(t)$.

3) Quelle est la vitesse limite du parachutiste ?

4) Le parachute doit être impérativement ouvert à plus de 500 m d'altitude.
Déterminer le temps maximum δ (à 0,1 seconde près) pendant lequel le parachutiste peut voler librement.

5) Que représente $d''(t)$? Que vaut $d''(\delta)$? Interpréter.

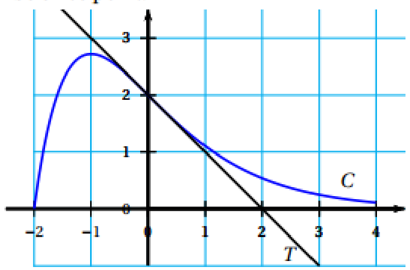
Exercice 10 (QCM)

Question 1 :

La courbe représentative C d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ est donnée ci-dessous. La tangente T à la courbe au point d'abscisse 0 traverse la courbe en ce point.

La fonction f est convexe sur l'intervalle :

a. $[-1\,;\,4]$
b. $[-2\,;\,0]$
c. $[-2\,;\,-1]$
d. $[0\,;\,4]$



Question 2 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x^2$ est convexe sur l'intervalle :

a. $]-\infty\,;\,+\infty[$ **b.** $[-2\,;\,+\infty[$ **c.** $]-\infty\,;\,-2]$ **d.** $[-6\,;\,+\infty[$

Question 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-2x+3}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' est donnée par :

a. $f'(x) = -2e^{-2x+3}$ **b.** $f'(x) = e^{-2x+3}$

c. $f'(x) = (-2x+3)e^{-2x+3}$ **d.** $f'(x) = (-2x-1)e^{-2x+3}$

Question 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x}-3}{e^x+1}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, combien la courbe représentative de f possède-t-elle de tangente(s) parallèle(s) à l'axe des abscisses ?

a. 0 ; **b.** 1 ; **c.** 2 ; **d.** 3.

Question 5 :

Sur $\mathbb{R}^*$ la dérivée de $f : x \longmapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ est définie par $f'(x) =$

a. $-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

b. $\dfrac{x+1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$

c. $-\dfrac{x+1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$

d. aucune des 3 réponses précédentes

<u>Exercice 11 (Vrai/faux)</u>

Affirmation 1 :

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = x^2e^{-2x}$

La courbe représentative de f admet un maximum au point d'abscisse $x = 1$

Affirmation 2 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 1-x^2 & \text{si } x<0 \\ f(x) = x^2+2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

f est dérivable en 0

Affirmation 3 :

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-2x}+3$.

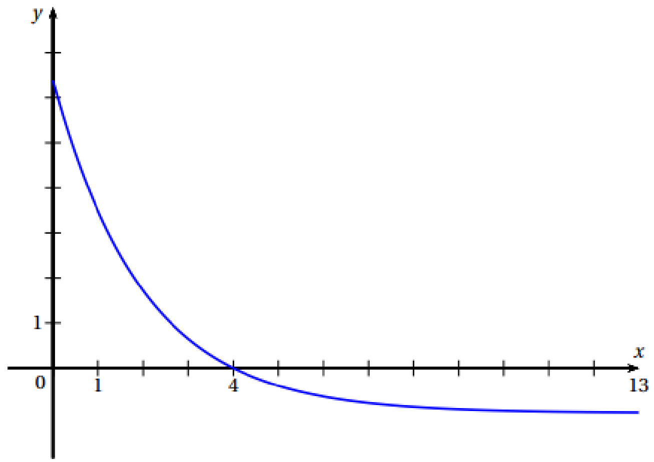
On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Alors :

La tangente à C au point d'abscisse $x = 1$ a pour équation $y = 3 - e^{-2x}$

Affirmation 4 :

On considère une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; 13] et on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction g', fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle [0 ; 13].



Proposition 2 : La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; 4].

Proposition 3 : La fonction g est concave sur l'intervalle [0 ; 13].

Affirmation 5 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$.

Affirmation 6 :

Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Pour tout x appartenant à l'ensemble $\mathbb{R}$ on a : $f'(x) = 1 - (f(x))^2$ où f' est la fonction dérivée de f.