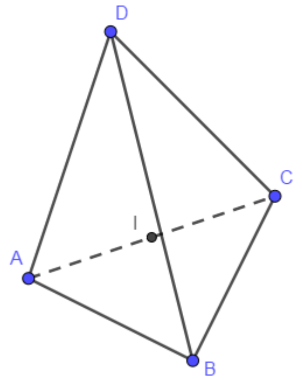
EXERCICES – VECTEURS, DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Exercice 1 (Représenter une combinaison linéaire/placement de point)

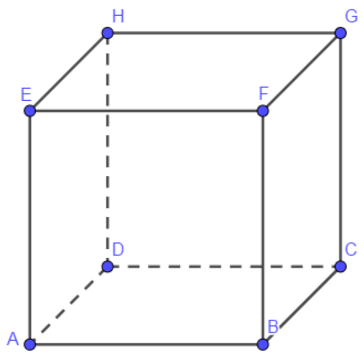
Partie 1 :

Soit ABCD un tétraèdre et I le milieu du segment [AC].



1) Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$
2) Construire le point F tel que $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA}$
3) Construire le point G tel que $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{AG} = \vec{0}$

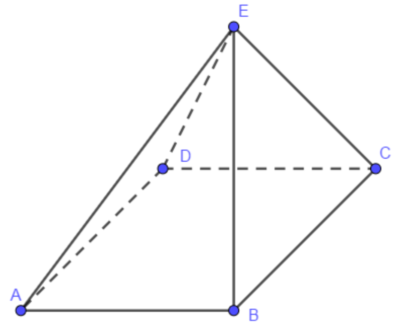
Partie 2 :



1) Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$
2) Construire le point F tel que $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA}$
3) Construire le point G tel que $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{AG} = \vec{0}$

Partie 3 :

Soit ABCDE une pyramide

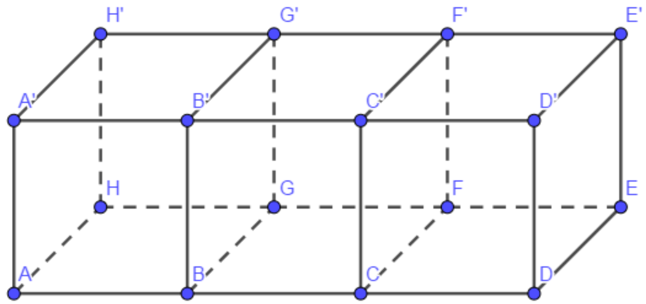


1) Construire le point F tel que $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{DE} - \frac{4}{5}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$
2) Construire le vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AE}$
3) Dans la base (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$) placer le point G(1 ; 2 ; -2)

Exercice 2 (Lire une combinaison linéaire/décomposition)

Partie 1 :

On considère la figure ci-dessous constituée de trois cubes



1) Compléter les égalités vectorielles suivantes :
   $\overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EE'}$ $\overrightarrow{\ldots F} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{A'B'}$ $\overrightarrow{AC} = \cdots \overrightarrow{AD}$
   $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{HD} - \overrightarrow{FD}$ $\overrightarrow{A\ldots} = 2\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC}$ $\overrightarrow{B\ldots} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE'} - \overrightarrow{FE'}$
2) a) Soit I le point d'intersection de (AE) et de (BG)
   Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$
   b) Soit J le point d'intersection de la droite (AE') et du plan (BB'G)
   Montrer que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE'}$

Partie 2 :

Soit le cube ABCDEFGH. On considère les points I, J et K tels que :

$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$

1) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CB}$
2) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{JK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CB}$

Partie 3 :

Soit le cube ABCDEFGH. On considère les points I, J et K tels que :

$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{EK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EF}$

1) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CB}$et $\overrightarrow{BF}$
2) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{JK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CB}$et $\overrightarrow{BF}$

Partie 4 :

Soit ABCD un tétraèdre et I le point défini par :

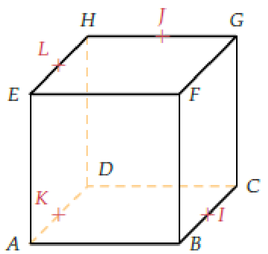
$$\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$$

Déterminer les réels λ et μ tels que $\overrightarrow{IB} = \lambda\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{BD}$

Exercice 3 (Position relative)

Partie 1 :

$ABCDEFGH$ est un cube et I ; J ; K et L les milieux respectifs de $[BC]$, $[GH]$, $[AD]$ et $[EH]$.



Déterminer en justifiant les positions relatives des droites ci-dessous.

On donnera leur intersection éventuelle.

1) (IB) et (GC).
2) (HB) et (GA).
3) (GC) et (BA).

Déterminer en justifiant les positions relatives des droites ci-dessous.

On donnera leur intersection éventuelle.

1) (JK) et (AH).
2) (FD) et (GH).
3) (IB) et (HJ).

Déterminer en justifiant les positions relatives des droites et plans ci-dessous. On donnera leur intersection éventuelle.

1) (EJ) et (HDA).
2) (JK) et (ABE).
3) (IJ) et (AFG).

Déterminer en justifiant les positions relatives des droites et plans ci-dessous. On donnera leur intersection éventuelle.

1) (FH) et (ACE).
2) (EJ) et (BCG).
3) (IJ) et (ABE).

Déterminer en justifiant les positions relatives des plans ci-dessous.

On donnera leur intersection éventuelle.

1) (ABJ) et (GIC).
2) (KGI) et (EAD).
3) (KGI) et (ABE).

Déterminer en justifiant les positions relatives des plans ci-dessous.

On donnera leur intersection éventuelle.

1) (EBG) et (HDC).
2) (EBI) et (HDC).
3) (IJK) et (HDC).

Partie 2 :

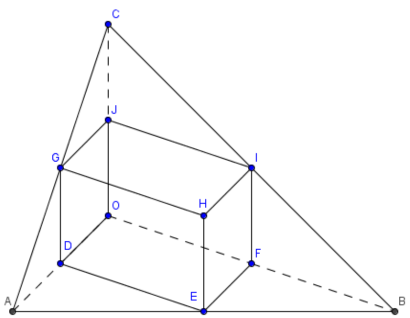
$ABCD$ est un tétraèdre, I, J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[CD]$ et $[AC]$.

Déterminer en justifiant les positions relatives des éléments ci-dessous.

On donnera leur intersection éventuelle.

1) (IK) et (AD).
2) (IK) et (AB).
3) (IJ) et (AID).
4) (ABJ) et (ACD).
5) (DIK) et (ABD).
6) (IJ) et (KBD).

Partie 3 :



ODEFGHIJ est un parallélépipède. Les points A, B et C appartiennent respectivement aux droites (OD), (OF) et (OJ), et les points E, I, G appartiennent respectivement aux droites (AB), (BC) et (CA).

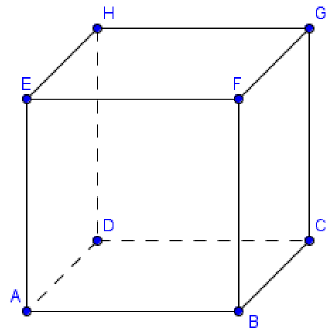
Déterminer la position relative des droites suivantes et justifier la réponse.

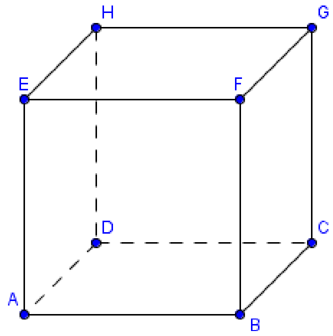
a) (OC) et (AB)   c) (EG) et (BC)   e) (CE) et (JH)

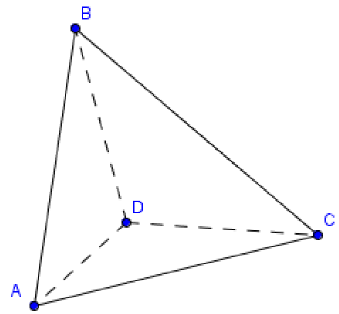
b) (JH) et (AB)   d) (DF) et (IJ)

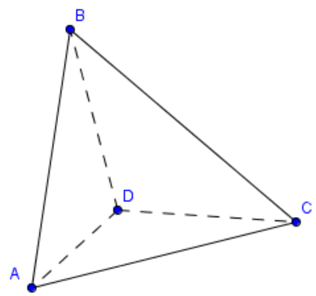
Exercice 4 (Sections de solides)

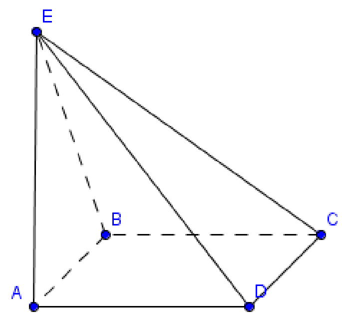
Pour chaque figure, déterminer la section du solide par le plan (IJK)

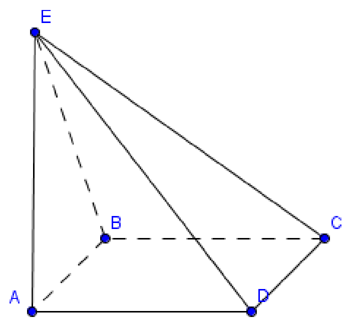












Exercice 5 (Vecteurs forment une base/décomposition/coordonnées)

Partie 1 :

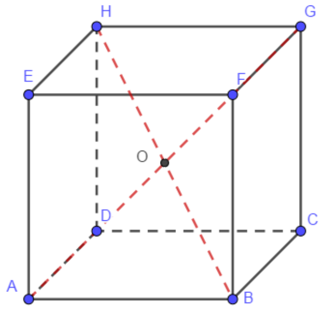
Dans un repère $(O\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(-3;2;4)$; $B(-1;1;0)$ et $C(2;-3;5)$.

1) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2) Donner les coordonnées des vecteurs :
$\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BC}$.

Partie 2 :

On considère le cube ABCDEFGH de centre O



On prend le repère orthonormé (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$)

1) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H et O dans le repère précédent.
2) Déterminer la décomposition des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OH}$; $\overrightarrow{FE}$ dans le repère précédent.
3) Déterminer si chaque repère ci-après constitue une base de l'espace et le cas échéant, déterminer les coordonnées des points et vecteurs précédents dans cette base.
   a) (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$)
   b) (B, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{BA}$)
   c) (B, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{BF}$)
   d) (O, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$)
   e) (O, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OH}$)

Partie 3 :

Soit ABCD un tétraèdre et I, J, K et L les milieux respectifs des arêtes [AB], [AC], [AD] et [BD].

1) Déterminer les coordonnées de I, J, K et L dans la base (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$)

2) a) (I, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{IL}$) est-il une base de l'espace ?

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IA}$ en fonction de $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$

c) En déduire les coordonnées de A dans la base (I, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{IL}$)

d) Déterminer les coordonnées de B, C et D dans la base (I, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{IL}$)

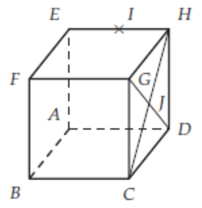
Partie 4 :

Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et les points A(0 ; -2 ; 1), B(3 ; -2 ; 0) et C(-3 ; 2 ; 0)

1) Montrer que (A, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) est un repère de l'espace.
2) Déterminer les coordonnées de B et C dans ce repère.

Partie 5 :

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1. Soient I le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.



1) Donner les coordonnées du point G dans le repère :
   a) $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$
   b) $(C\,;\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CG})$
   c) $(H\,;\overrightarrow{HE},\overrightarrow{HD},\overrightarrow{HG})$
   d) $(F\,;\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FG},\overrightarrow{FE})$
2) Même question avec le point B.
3) Même question avec le point J.

Exercice 6 (Alignement/colinéarité/parallélisme/appartenance à une droite)

Partie 1 :

Les points A, B et C sont-ils alignés ?

a) $A(1;2;1)$; $B(2;1;-1)$ et $C(3;-3;-6)$

b) $A(3;-2;2)$; $B(4;-2;-3)$ et $C(11;-2;-37)$

c) $A(-1;0;1)$; $B(1;1;0)$ et $C(-5;-2;3)$

Partie 2 :

Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

a) $A(0;0;2)$; $B(2;0;2)$; $C(3;1;0)$ et $D(5;2;-1)$

b) $A(2;-5;1)$; $B(1;1;4)$; $C(-3;-1;0)$ et $D(1;5;-3)$

Partie 3 :

On considère une pyramide SABCD dont la base ABCD est un parallélogramme. I est le milieu de [SB] et E est le point défini par :
$\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB}$

La droite (IE) coupe la droite (SA) en F.

1) Démontrer que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AS}$. Que peut-on en déduire pour les points A, F et S ?

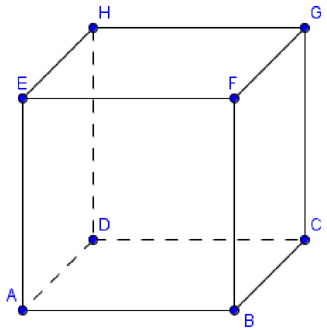
2) Soit J le milieu de [AD].

a) Quelle type d'égalité doit vérifier un point de la droite (EJ)

b) Montrer que C appartient à la droite (EJ)

Partie 4 :

Soit ABCDEFGH un pavé droit.



1) Placer les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

2) Démontrer que les points N, M et P sont alignés

Partie 4 :

Soit ABCD un tétraèdre. On considère les points I et J, milieux respectifs des segments [BC] et [AD], et le point K tel que :

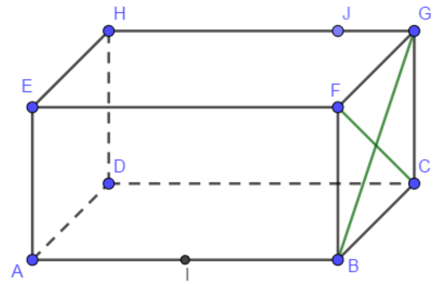
$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD})$$

1) Faire une figure

2) Démonter que K est un point de (IJ)

Partie 5 :

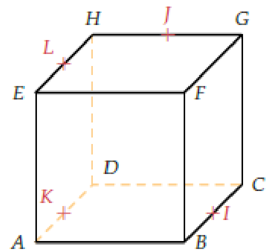
Soit ABCDEFGH un pavé droit. On note I le milieu de l'arête [AB], J le point tel que : $\overrightarrow{HJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et O le centre de la face BCGF



Démontrer que les droites (IH) et (JO) sont parallèles.

Partie 6 :

$ABCDEFGH$ est un cube et I ; J ; K et L les milieux respectifs de $[BC]$, $[GH]$, $[AD]$ et $[EH]$.



Le point M est défini par $\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EF}$

1) En fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ exprimer les vecteurs suivants :
$\overrightarrow{EM}$; $\overrightarrow{HC}$; $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BJ}$; $\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{MJ}$.

2) Les droites (BK) et (MJ) sont-elles parallèles ?
Le démontrer en utilisant la question précédente.

3) Que peut-on en déduire concernant les points B, K, M et J ?

Exercice 7 (coplanaires/appartenance à un plan)

Partie 1 :

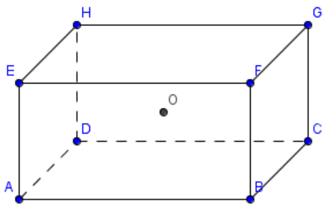
Soient les points $A(3; 1; -2)$; $B(2; 3; 2)$; $C(4; -2; 0)$ et $D(3; 0; 4)$.
Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

Partie 2 :

Les vecteurs $\vec{u}(1; -1; 1)$; $\vec{v}(1; 1; -3)$ et $\vec{w}(0; -2; 4)$ sont-ils coplanaires ?

Partie 3 :

Soit ABCDEFGH un pavé droit de centre O.



1) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont coplanaires.

2) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont –ils coplanaires ?

Partie 4 :

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(0;3;-1)$, $B(2;-2;0)$, $C(4;1;5)$ et $D(2;21;12)$.

1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

2) Le point D appartient-il à ce plan ?

Partie 5 :

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace,on considère les points $A(1;-1;-1)$, $B(5;0;-3)$, $C(2;-2;-2)$ et $D(0;5;-2)$.

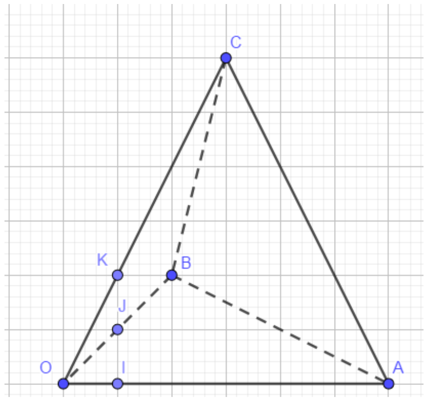
1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

2) Le point D appartient-il à ce plan ?

Exercice 8 (Synthèse)

Partie 1 :

On considère le tétraèdre ci-dessous. L'espace est rapporté au repère (O ; $\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{OK}$)



1) Donner les coordonnées des points A, B et C dans ce repère

2) Soit H le centre de gravité du triangle OAC : H vérifie la relation

$$\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$$

Exprimer $\overrightarrow{OH}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$.En déduire les coordonnées de H. Placer H sur la figure.

3) On note M le milieu de [AC]. Vérifier que O, H et M sont alignés

4) Soit G le centre de gravité du tétraèdre donc G vérifie la relation :

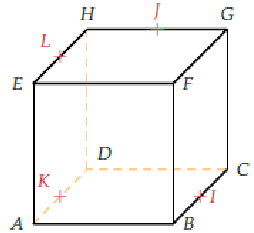
$$\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$. En déduire les coordonnées de G. Placer G sur la figure.

5) Vérifier que G appartient à la droite (BH)

Partie 2 :

$ABCDEFGH$ est un cube et I ; J ; K et L les milieux respectifs de $[BC]$, $[GH]$, $[AD]$ et $[EH]$.



On considère les points M et N définis par :

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

et

$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$.

1) Construire la figure.

2) Démontrer que les points C, E et M sont alignés.

3) Démontrer que les points E, F, H et N sont coplanaires.

Partie 3 :

On considère un cube ABCDEFCH donné en annexe 2 (à rendre avec la copie).

On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

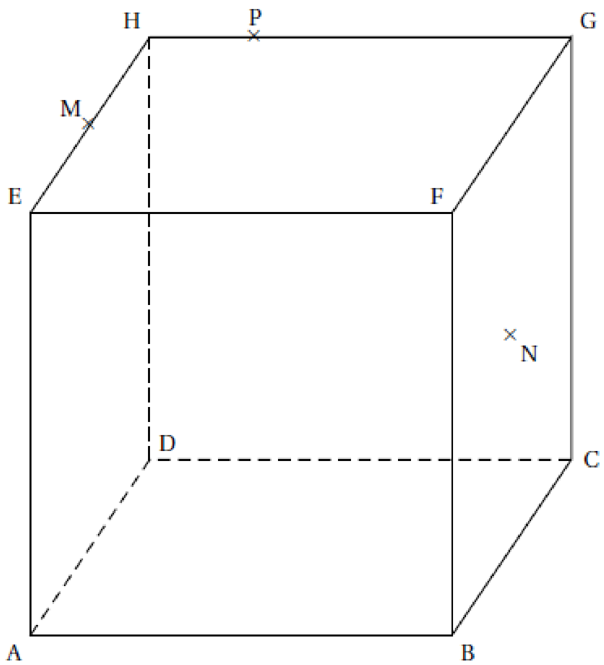
1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
   Construire le point L

2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2. Déterminer les coordonnées du point L.
3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1 ; 1 ; \frac{5}{8}\right)$.
   Le triangle TPN est-il rectangle en T ?

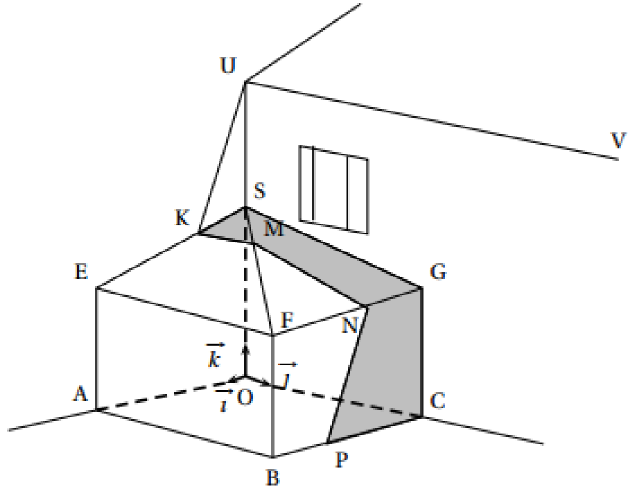


Partie 4 :

Un particulier s'intéresse à l'ombre portée sur sa future véranda par le toit de sa maison quand le soleil est au zénith. Cette véranda est schématisée ci-dessous en perspective cavalière dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Le toit de la véranda est constitué de deux faces triangulaires SEF et SFG.

- Les plans (SOA) et (SOC) sont perpendiculaires.
- Les plans (SOC) et (EAB) sont parallèles, de même que les plans (SOA) et (GCB).
- Les arêtes [UV] et [EF] des toits sont parallèles.

Le point K appartient au segment [SE], le plan (UVK) sépare la véranda en deux zones, l'une éclairée et l'autre ombragée. Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale KMNP qui est la limite ombre-soleil.



1. Sans calcul, justifier que :
   a. le segment [KM] est parallèle au segment [UV] ;
   b. le segment [NP] est parallèle au segment [UK].

Exercice 9 (Vrai/faux)

Affirmation 1 :

Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère les points :
A de coordonnées (1 ; 1 ; 0), B de coordonnées (2 ; 0 ; 3), C de coordonnées (0 ; −2 ; 5) et D de coordonnées (1 ; −5 ; 5).

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Affirmation 2 :

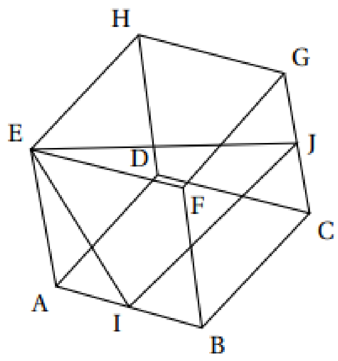
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points

$$A(2 ; 1 ; -1), \; B(-1 ; 2 ; 4), \; C(0 ; -2 ; 3), \; D(1 ; 1 ; -2)$$

1. Affirmation 1 : les points A, B et C définissent un plan.

Affirmation 3 :

On donne le cube ABCDEFGFH, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes [AB] et [CG]. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre.
Le candidat est appelé à juger chacune des 10 affirmations suivantes.



L'intersection des plans (FIJ) et (ABC) est la droite passant par I et par le milieu de l'arête [DC].

Exercice 10 (Approfondissement)

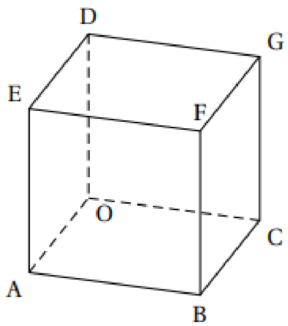
Partie 1 :

On considère le cube OABCDEFG d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.
Il n'est pas demandé de rendre le graphique complété avec la copie.
Soient les points P et Q tels que $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OQ} = 4\overrightarrow{OC}$.
On appelle R le barycentre des points pondérés (B, −1) et (F, 2).
L'espace est muni du repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OC},\,\overrightarrow{OD}\right)$.

1. **a.** Démontrer que le point R a pour coordonnées (1 ; 1 ; 2).

b. Démontrer que les points P, Q et R ne sont pas alignés.

c. Quelle est la nature du triangle PQR ?



Partie 2 :

On considère le tétraèdre ABCD ; on note I milieu du segment [AB] et J celui de [CD].

1. **a.** Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés
{(A, 1) ; (B, 1) ; (C, −1) ; (D, 1)}.
Exprimez $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Placez I, J et G_1 sur la figure (voir feuille annexe).

b. Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés
$\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (D,\ 2)\}$.
Démontrez que G_2 est le milieu du segment [ID]. Placez G_2.

c. Démontrez que IG_1DJ est un parallélogramme.
En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.

2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés
$\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (C,\ m-2)\ ;\ (D,\ m)\}$.

a. Précisez l'ensemble $\mathscr{E}$ des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.
Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.

b. Démontrez que G_m, appartient au plan (ICD).

c. Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.