EXERCICES LIMITES DE FONCTIONS

Exercice 1 (Révisions)

Partie 1 :

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des polynômes suivants :

a) $P(x) = 5x^3 - 3x + 1$ b) $Q(x) = -2x^4 + x^2 + 3$

Partie2

Calculer les limites en $\pm\infty$ des fonctions f, g et h.

1) $f : x \mapsto x\left(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}\right)$.

2) $g : x \mapsto x\left(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{2x^2+1}\right)$.

3) $h : x \mapsto x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - 1\right)$

Partie 3

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^4 + 2$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 - 4x$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{4}{3\sqrt{x}}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^4+2x^2-7}{4x+2}$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3-5x+1}{4x^5-7}$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 + 3x^3 - 5$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^3 - 3x^2 + 1$ 9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^2-3x+1}{3x^2+2x-4} + 1$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} x + e^x$ 11) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-5)e^x$ 12) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} - 3x$

13) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-3x} - 2x$

Partie 4

Par un encadrement judicieusement choisi, déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2-\cos x}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 + x\sin x$

Exercice 2 (Révisions)

Partie 1 :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{3x+4}{9x+2}$ 2) $g(x) = \sqrt{4x-2}$ 3) $h(x) = 3x^2 + 5$

4) $i(x) = \frac{2\sqrt{3x+10}}{4x-5}$ 5) $j(x) = x^3$ 6) $k(x) = \sqrt{2x-8} - \sqrt{3x+1}$

7) $l(x) = \frac{2}{3x+9} - \frac{5x}{2x+10}$ 8) $m(x) = -\frac{1}{\sqrt{3x^2+5x-1}}$

Partie 2 :

Etudier, la position relative de la courbe C représentative de la fonction f et de la droite D représentative de la fonction g.

1) $f(x) = \frac{2}{x-4}$ et $g(x) = 3x + 1$ 2) $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = -5x + 1$

Exercice 3 (Limites en un point)

Partie 1 :

1) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{2x+1}{x-4}$ 2) $\lim\limits_{x\to-5} \dfrac{-7x^3+4}{x^2}$ 3) $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{3x^4+2}{x-2}$

Partie 2 :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions rationnelles suivantes puis déterminer les limites aux bornes de leur ensemble de définition.

1) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{1-x}$ 3) $h(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

2) $g(x) = \dfrac{x+2}{(x+3)^2}$ 4) $k(x) = 3x - 5 + \dfrac{2}{x+2}$

Exercice 4 (limites par composition)

Partie 1 :

Déterminer les limites des fonctions suivantes au point d'abscisse demandé

1) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-5}}$ en $x = 5$

2) $f(x) = \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$ en $-\infty$

3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x+1}{x^2+1}}$ en $-\infty$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en $x = 1$

5) $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x + 1}{x+2}\right)$ en $+\infty$

6) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2}{1-x}}$ en $-\infty$

7) $f(x) = \sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$

Partie 2 :

Déterminer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{5 - \dfrac{4}{x^2}}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)^3$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x})$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$

Partie 3 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+3} - x$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2-x+3}+2x$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x-6)^6$

Partie 4 :

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1}$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} e^{\frac{1}{x}}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2+1}$

Exercice 5 (asymtptotes)

Partie 1 :

On donne une limite d'une fonction f. En déduire l'équation d'une éventuelle asymptote au graphe de f.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 10^{99}$

3) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$

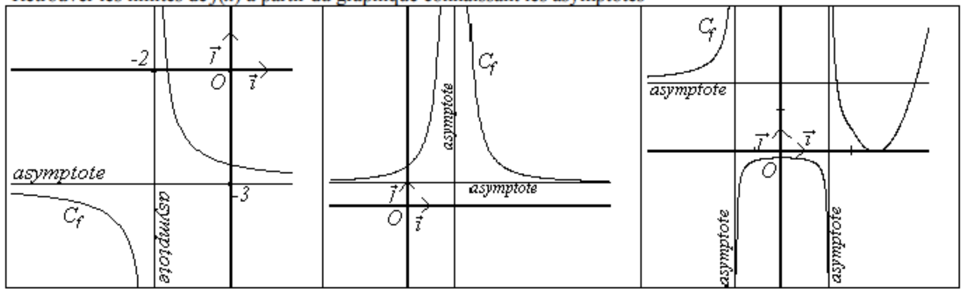
4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = +\infty$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -10^{99}$

Partie 2 :

Retrouver les limites de $f(x)$ à partir du graphique connaissant les asymptotes



Exercice 6 (0/0)

Partie 1 :

Étudier la limite de la fonction f en -2.

1) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2+3x+2}$

2) $f(x) = \dfrac{-x^2+x+6}{2x^2+5x+2}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{(x+2)^2}$

4) $f(x) = \dfrac{x^3+8}{x^2-x-6}$

Partie 2 :

Étudier la limite de la fonction f en 0.

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x^2-2x}$

Partie 3 :

$$\lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}$$

Exercice 7 (indetermination d'exponentielles)

Partie 1 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x + 4$

Partie 2 :

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{2x} - 3e^x + 1\right)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{2x} - 3e^x + 1\right)$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x+1} \times e^{1-x}$

Exercice 8 (croissances comparées)

Partie 1 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-e^{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}+1$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x^{3}}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{x}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^{x}-4}{2x}$

Partie 2 :

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\,e^{-x}}{x^{2}+1}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{3}{x}}-1\right)$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{3}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x-1}{x+1}}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{2}-2\dfrac{x-1}{e^{1-x}}\right)$

Exercice 9 (synthèse)

Partie 1 :

On considère la fonction f telle que $f(x)=\frac{x^2-7x+14}{x-4}$. On note C la courbe représentative de f.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-4}$

3) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Donner, si possible, une interprétation géométrique de ces limites.

4) Etudier les variations de la fonction f.

5) Etudier la position relative de C et de la droite d, d'équation y = x – 3.

6) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-3)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x-3)=0$

7) Tracer les asymptotes, la droite d et la courbe C dans un même repère.

Partie2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2e^{-2x}-8e^{-x}+6.$$

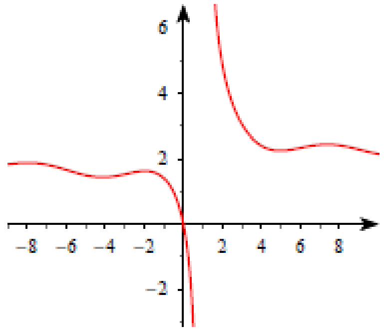
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.
   b. Donner l'interprétation graphique des solutions trouvées à la question précédente.
2. **a.** Étudier la limite de f en $+1$. En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$.
   On donnera une équation de $\mathscr{D}$.
   b. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x)=e^{-2x}\left(2-8e^{x}+6e^{2x}\right)$.
   En déduire la limite de f en -1.

Partie 3 :

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x-1}$

1) On a représenté ci-contre la fonction f. Conjecturer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $-\infty$ et les limites à gauche et à droite de 1.
2) a) Demontrer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ grâce à un encadrement.
   b) Déterminer les limites à gauche et à droite de 1
   c) Interpréter graphiquement les limites obtenues.



Exercice 10 (QCM)

Question 1 :

La limite, lorsque x tend vers 2 de $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x-2}$ est égale à :

a. 0 ; **b.** $+\infty$; **c.** 2 ; **d.** 3.

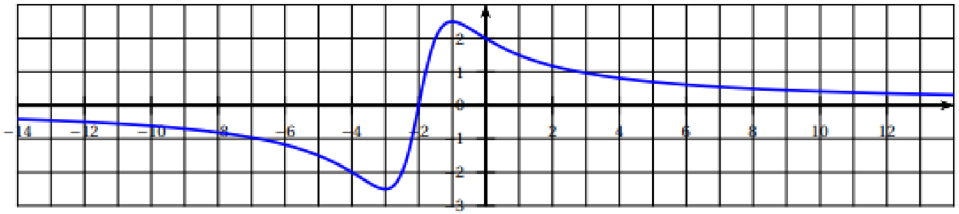
Question 2 :

. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f' sa fonction dérivée. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine. Sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2019$, on peut affirmer que :

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 2019$; **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -2019$;
c. $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$; **d.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 1$

Question 3 :

on considère une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé est donnée ci-après :



La limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de $u(x)$ est égale à :

a. $+\infty$; **b.** $-\infty$; **c.** 0 ; **d.** 1.

Question 4 :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x^3-3x+9}\right) =$$

a. $+\infty$ **b.** 0 **c.** $e^{\sqrt{x^3}}$ **d.** e^3

Question 5 :

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{3x+2}-e^2}{x}\right) =$$

a. $+\infty$ **b.** 0 **c.** $\frac{e^2}{3}$ **d.** e^2

Question 6 :

Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		3		6		$+\infty$
	$+\infty$	↘	$\frac{5e^2}{4}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{7\sqrt{2}}{5}$	↘	-3

La courbe représentative de f admet :

a. aucune droite asymptote

b. exactement 1 droite asymptote, horizontale ou verticale

c. exactement 2 droites asymptotes, horizontales ou verticales

d. exactement 3 droites asymptotes, horizontales ou verticales.

Question 7 :

Soient : f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2e^{-3x} - 4x + 6\cos(0,5x),$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

a. $-\infty$

b. $+\infty$

c. n'existe pas

d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

Exercice 11 (Vrai/faux)

Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

Affirmation 1 :

. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{2x^2+1} = \frac{1}{2}$.

Affirmation 2 :

$\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3} = +\infty$

Affirmation 3 :

Soit pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = 1-\cos(2x)$,
$\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)}{x^2} = 2$.

Affirmation 4 :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

Affirmation 5 :

. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = +\infty$

Affirmation 6 :

) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{x^2}-1}{x} = 1$