# EXERCICES LOGARITHME

## Exercice 1 (propriétés algébriques)

Partie 1 :

Exprimer en fonction de ln 2 les réels suivants :

1) $\ln 8$ 2)$\ln(\frac{1}{4})$3) $\ln(16e)$ 4) $ln\sqrt{2}$ 5) $ln\frac{64}{e^2}$

Partie 2 :

Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln c$ où $c$ est un réel strictement positif.

1) $A = 2\ln 5 + \ln 3$
2) $B = 3\ln 3 - 2\ln 2$
3) $C = -\ln 5 + 3\ln 2$
4) $D = 3\ln 4 - 3\ln 2$

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1) $A = e^{\ln 6 - 2\ln 3}$ 3) $C = \frac{e^{\ln 5 - 1}}{e^{2+\ln 5}}$

2) $B = e^{3\ln 2 - \ln 4 + 1}$ 4) $D = \frac{e^{2\ln 3 - \ln 2}}{e^{-3\ln 2}}$

Partie 3 :

Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de ln 3.

1) $\ln\left(\frac{1}{9}\right)$ 4) $2\ln 3 - \ln 27$

2) $\ln 24 - \ln 8$ 5) $\ln\left(9\sqrt{3}\right)$

3) $\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln 4$

Partie 4 :

Simplifier les écritures suivantes :

1) $A = e^{\ln 3}$ ; $B = \frac{e^{3+\ln 8}}{e^{2+\ln 4}}$ ; $C = \frac{e^{\ln 8}}{e^{3\ln 2}}$

2) $f(x) = e^{\ln(x-1)+\ln x}$ ; $g(x) = \ln e^{\frac{1}{x}} + e^{-\ln x}$

Partie 5 :

1) Simplifier : $a = \ln 3 + \ln\frac{1}{3}$ ; $b = \ln\frac{1}{16}$ ; $c = \frac{1}{2}\ln\sqrt{2}$

2) Exprimer les nombres suivants en fonction de ln 2 et ln 5

$a = \ln 50$ ; $b = \ln\frac{16}{25}$ ; $c = \ln 250$

3) Démontrer que : $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) = 0$

Partie 6 :

Simplifier au maximum chacun des nombres suivants :

1) $A = \ln e^3 - \ln e^2$

2) $B = \ln e\sqrt{e}$

3) $C = \ln 2 + \ln(16e) - \ln(4e^2)$

4) $D = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\ln\frac{1}{e}\right)^2$

5) $E = 3(\ln 3 + \ln 5) - \ln 27 - 2\ln 10 - \ln\frac{1}{4}$

## Exercice 2 (Résolution d'équations et d'inéquations)

Partie 1 :

Résoudre les équations/inéquations suivantes :

a) $\ln(x-2) = 11$ b) $\ln(4x+1) = 0$ c)$\ln(\frac{x+1}{2x+1}) = \ln(\frac{1}{3})$

d)$\ln(3x-1) - \ln(x+2) = -ln2$

e) $\ln((2x-1)(x+3)) \geq ln15$ f) $\ln(2x+1) + \ln(x+3) \geq \ln 15$

g) $\ln(x) \geq ln4 - \ln(x+1)$

h) $-4\ln^2(\text{x}) + 3\ln(x) + 2 = 1$

i) $\ln(x)(x-2) = 0$j) $\ln(x-2)(x+5) > 0$

Partie 2 :

Résoudre les équations suivantes en précisant auparavant leur ensemble de validité :

1) $\ln(2-2x) = 1$
2) $\ln(2-x) = -3$
3) $\ln(x^2-8) = 0$
4) $\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = 2$
5) $e^{x+2} = 3$
6) $e^{\frac{x}{x+1}} = 2$
7) $(e^x+1)(e^x-4) = 0$
8) $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$
9) $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$
10) $\ln(x-2) = \ln 2$
11) $\ln(x-2) = \ln(x^2-2)$

## Partie 3 :

Résoudre les inéquations suivantes en précisant auparavant leur ensemble de validité :

1) $\ln x < 1$
2) $\ln x \geqslant 2$
3) $-1 \leqslant \ln x \leqslant 2$
4) $\ln(2x-1) > -1$
5) $e^{x-1} < 2$
6) $e^{\frac{x+1}{x}} > 3$
7) $\frac{1}{2} \leqslant e^x \leqslant 2$
8) $(e^x+1)(e^x-4) \leqslant 0$
9) $\ln(x-2) \leqslant \ln(2x-1)$
10) $\ln(-3x) \geqslant \ln(x^2-4)$
11) $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \geqslant \ln x$
12) $\ln x \leqslant \ln(x^2-2x)$

## Partie 4 :

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln(-2x+1) \leqslant 0$
2) $\ln\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) \geqslant 0$
3) $\ln(2x-1)+1 > 0$

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $2\ln(x) \geqslant \ln(2-x)$ ;
2) $\ln(x)+\ln(2x+5) \leqslant \ln 3$ ;
3) $\ln(4x)-\ln 2 < 2\ln 4$.

1) Résoudre l'équation $X^2-2X-15=0$.
2) En déduire les solutions des équations suivantes :
   a) $e^{2x}-2e^x-15=0$ ;
   b) $(\ln x)^2-2\ln x-15=0$.

# Exercice 3 (Résolution d'équations et d'inéquations avec $a^x$)

## Partie 1 :

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $n$ entier naturel

a) $2^n \leqslant 100$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-2}$ c) $0,2 \geqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n$ d) $\left(1+\frac{3}{100}\right)^n \geqslant 2$

## Partie 2 :

Résoudre les équations/inéquations suivantes :

a) $0,999^n < 10^{-11}$ b) $1,000001^n > 10^9$

## Partie 3 :

Dans chacun des cas suivants, en utilisant la fonction ln, déterminer le plus petit entier naturel $n$ tel que :

1) $(0,7)^n \leqslant 10^{-2}$ ;
2) $(1,05)^n > 10$ ;
3) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-7}$ ;
4) $(0,98)^{n-1} < 0,6$.

# Exercice 4 (Calculs de limites)

## Partie 1 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x + x$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)\ln(x)$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x+1}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - x + 1$ 7) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x)\ln x$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\frac{1}{x}$

## Partie 2 :

Déterminer les limites au point considéré :

1) $f(x) = x - \ln x$ en $+\infty$
2) $f(x) = x + 1 + \frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$
3) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ en $0$
4) $f(x) = x + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$
5) $f(x) = \ln(e^x+2)$ en $-\infty$ et $+\infty$
6) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x+1}{2e^x+3}\right)$ en $-\infty$ et $+\infty$

## Partie 3 :

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((\ln x)^2 - \ln x\right)$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - 2x)$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln x - x^2\right)$

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \left((\ln x)^2 - 3\ln x\right)$
2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(-(\ln x)^2 + 2\ln x - 3\right)$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+105x+18)$ ;
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(8-x^3)$.

1) Démontrer la propriété suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
2) En déduire les limites suivantes.
   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.
   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\ln\left(1+e^{-x}\right)$.
   c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$.

## Exercice 5 (Calculs de dérivées)

Partie 1 :

Pour les fonctions suivantes calculer la fonction dérivée en ayant donné auparavant leur ensemble de dérivation :

1) $f(x) = \ln(1+x^2)$
2) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
3) $f(x) = \ln(\ln x)$
4) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$
5) $f(x) = e^{-x}\ln x$
6) $f(x) = e^{x\ln x}$
7) $f(x) = \ln(1+e^x)$
8) $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

Partie 2 :

Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle $I$ indiqué.

1) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ sur $I = ]0;1[$
2) $f(x) = (\ln x)^2(3-\ln x)$ sur $I = ]0;+\infty[$
3) $f(x) = (2-\ln x)(1-\ln x)$ sur $I = ]0;+\infty[$
4) $f(x) = e^{5\ln x+2}$ sur $I = ]0;+\infty[$

Partie 3 :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, déterminer l'équation de la tangente en x = 2

1) $f(x) = \ln(x) + x + 1$ 2) $g(x) = (2x-4)\times\ln x$ 3) $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

## Exercice 6 (Etude de fonctions)

Partie 1 :

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $I$.

1) $f(x) = 2-5(\ln x)^2$ sur $I = ]0;+\infty[$
2) $f(x) = \dfrac{4}{\ln x}$ sur $I = ]0;1[$
3) $f(x) = e^{2\ln x - x}$ sur $I = ]0;+\infty[$

Partie 2 :

Soit la fonction f telle que $f(x) = (1+x)\ln(x) - 2x$ définie sur $R$

1) Etudier les variations de f.

Soit la fonction g telle que $g(x) = \ln(x^2) + 2x^2 - 4x + \frac{5}{x}$ définie sur $R^*$

1) Etudier les variations de g.

## Exercice 7 (synthèse maths)

Partie 1 :

$f$ est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

et $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) a) Déterminer les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$

b) Étudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variations.

2) a) On note A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1.
Trouver une équation de la tangente $T$ à $\mathscr{C}_f$ en A.

b) Construire $T$, puis $\mathscr{C}_f$. On prendra comme unité 2cm sur les abscisses et 5 cm sur les ordonnées.

3) M est un point de $\mathscr{C}_f$.
Démontrer que la tangente $T_u$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ en M est parallèle à la droite d'équation $y = x$ si, et seulement si :

$$u^3 - 1 + 2\ln u = 0 \quad \text{(E)}$$

4) À partir de l'équation (E), démontrer que A est le seul point de $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Partie 2 :

**A : Étude d'une fonction auxiliaire**

$g$ est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(1+x^2)$

1) Démontrer que sur l'intervalle $[1;+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ et donner pour $\alpha$ un encadrement d'amplitude $10^{-1}$.

2) Préciser le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

**B : Étude d'une fonction**

$f$ est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a) Quelle est la limite de $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ quand $x$ tend vers 0 ?

b) En déduire que $f$ est dérivable en $x=0$ et trouver une équation de la tangente $T$ en $x=0$ à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2) a) Vérifier que pour tout réel $x>0$, $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

b) En déduire la limite en $+\infty$.

3) a) Démontrer que pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire les variations de $f$.

c) Construire $T$ , puis $\mathscr{C}_f$. On prendra comme unités : 1 cm sur les abscisses et 4 cm sur les ordonnées.

## Partie 3 :

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\ln\left(e^x+1\right).$$

1) Justifier que $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Étudier les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe de $f$.

3) Étudier les variations de $f$.

## Partie 4 :

Soit $f$ la fonction définie sur $]-4\,;\,4[$ par :

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+4}{4-x}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Pour tout réel $x\in]-4\,;\,4[$, comparer $f(-x)$ et $f(x)$.
En déduire que $\mathscr{C}$ possède un élément de symétrie.

2) Étude de $f$ sur $[0\,;\,4[$.

a) Déterminer la limite de $f$ en 4. En donner une conséquence graphique

b) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\,;\,4[$.

c) En déduire le sens de variation de $f$ sur $[0\,;\,4[$ .

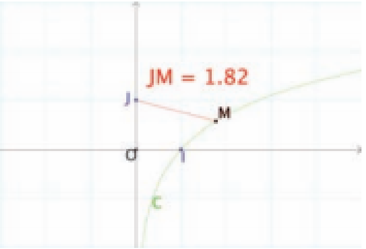
d) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 0.

e) Calculer l'abscisse du point $A$ de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 1.
En donner une valeur décimale approchée à $10^{-2}$ près.

3) Tracer précisément la courbe $\mathscr{C}$ en utilisant les résultats obtenus précédemment.

## Exercice 8 (synthèse opti)

Soit la fonction $f$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln x$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;I,J)$. Soit $M$ un point quelconque sur $\mathscr{C}$.




1) À l'aide d'un logiciel, conjecturer la position du point $M$ sur $\mathscr{C}$ qui permet d'obtenir une valeur minimale pour la distance $JM$.

2) Soit $x$ l'abscisse de $M$ avec $x>0$. Exprimer $JM$ en fonction de $x$.

3) On pose $g(x)=x^2-1+\ln x$.

a) Déterminer les limites de $g$ en 0 et en $+\infty$.

b) Dresser le tableau de variation de $g$.

c) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0\,;+\infty[$.
Donner la valeur exacte de $\alpha$.

d) En déduire le signe de $g(x)$.

4) On pose $f(x)=x^2+(1-\ln x)^2$.

a) Montrer que pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x}$.

b) Étudier les variations de la fonction $f$ sur $]0\,;+\infty[$.

c) En déduire la position de $M$ qui rend la distance $JM$ minimale, et calculer cette distance.

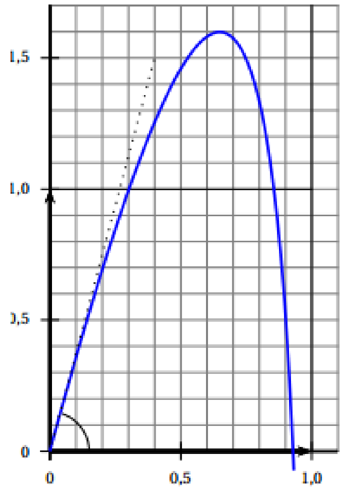
## Exercice 9 (synthèse opti)

### Partie 1 :

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir $\theta$ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.
Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.
On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0;1[$ par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

où $b$ est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, $x$ est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.




1. La fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $[0;1[$. On note $f'$ sa fonction dérivée.
   On admet que la fonction $f$ possède un maximum sur l'intervalle $[0;1[$ et que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0;1[$ :
   $$f'(x) = \frac{-bx+b-2}{1-x}.$$
   Montrer que le maximum de la fonction $f$ est égal à $b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.
2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre $b$ la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.
3. Dans cette question, on choisit $b = 5,69$.
   L'angle de tir $\theta$ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction $f$ au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.
   Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\theta$.

### Partie 2 :

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.
L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

**Partie A - Modélisation de l'âge d'un épicéa**

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0;1[$ par :

$$f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

où $x$ désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0;1[$.
2. Déterminer les valeurs du diamètre $x$ du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

**Partie B**

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur, regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Âges (en années) | 50 | 70 | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 120 | 130 | 150 |
| 2 | Hauteurs (en mètres) | 11,2 | 15,6 | 18,05 | 19,3 | 20,55 | 21,8 | 23 | 24,2 | 25,4 | 27,6 | 29,65 | 33 |
| 3 | Vitesse de croissance (en mètres par année) | | 0,22 | 0,245 | 0,25 | | | | | | | | |

1. **a.** Interpréter le nombre 0,245 dans la cellule D3.
   **b.** Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite ?
2. Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à 1,30 m du sol vaut 27 cm.
3. La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.
   **a.** Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en expliquant la démarche.
   **b.** Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

## Exercice 10 (synthèse convexité)

On a utilisé un logiciel de calcul formel et on a obtenu les résultats suivants :

| | |
|---|---|
| 1 | dériver $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$<br>$\frac{1-\ln(x)}{x^2}$ |
| 2 | dériver $\left(\frac{1}{x^2}\right)$<br>$-\frac{2}{x^3}$ |
| 3 | dériver $\left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$<br>$\frac{1-2\ln(x)}{x^3}$ |

*On pourra utiliser les résultats obtenus par ce logiciel pour répondre à certaines questions de l'exercice.*

On considère la fonction $f$ définie sur $[1 ; 10]$ par

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$$

et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

La fonction $f$ est deux fois dérivable sur $[1 ; 10]$, on note $f'$ sa fonction dérivée et $f''$ sa fonction dérivée seconde.

1. (a) Déterminer $f'(x)$ sur $[1 ; 10]$.
   (b) Construire le tableau de variation de la fonction $f$ sur $[1 ; 10]$.
2. (a) Justifier que $f''(x)=\dfrac{2\ln(x)-3}{x^3}$ sur $[1 ; 10]$.
   (b) Étudier le signe de $f''$ sur $[1 ; 10]$.
   (c) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

## Exercice 11 (synthèse suites)

### Partie 1 :

Dans tout l'exercice, $n$ désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n) : \quad \frac{\ln(x)}{x}=\frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif $x$.

**Partie A**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

On a donné en ANNEXE, qui n'est pas à rendre, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f$ dans un repère orthogonal.

**1.** Étudier les variations de la fonction $f$.

**2.** Déterminer son maximum.

**Partie B**

**1.** Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1 ; \mathrm{e}]$ notée $\alpha_n$.

**2.** D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geqslant 3$, le nombre réel $\alpha_n$ est solution de l'équation $(E_n)$.

**a.** Sur le graphique sont tracées les droites $D_3$, $D_4$ et $D_5$ d'équations respectives $y=\dfrac{1}{3}$, $y=\dfrac{1}{4}$, $y=\dfrac{1}{5}$.
Conjecturer le sens de variation de la suite $(\alpha_n)$.

**b.** Comparer, pour tout entier $n \geqslant 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_n)$.
Déterminer le sens de variation de la suite $(\alpha_n)$.

**c.** En déduire que la suite $(\alpha_n)$ converge.
*Il n'est pas demandé de calculer sa limite.*

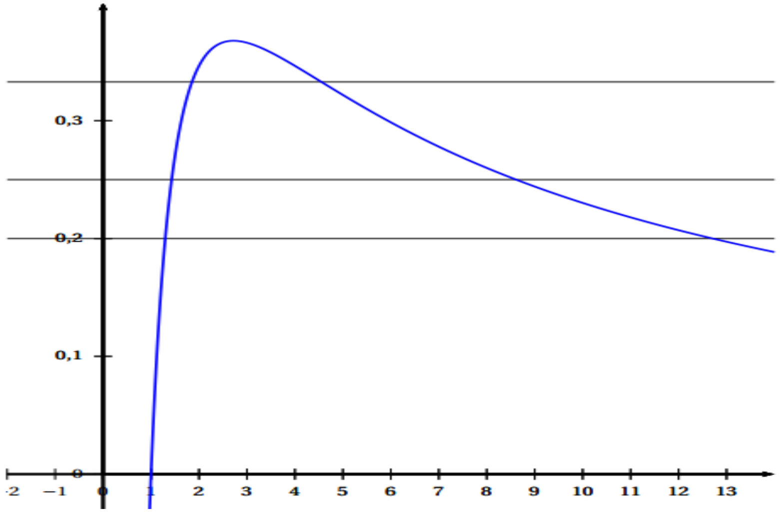
**3.** On admet que, pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation $(E_n)$ possède une autre solution $\beta_n$ telle que

$$1 \leqslant \alpha_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \beta_n.$$

**a.** On admet que la suite $(\beta_n)$ est croissante.
Établir que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 3,

$$\beta_n \geqslant n\frac{\beta_3}{3}.$$

**b.** En déduire la limite de la suite $(\beta_n)$.



## Partie 2 :

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = \mathrm{e} \times \sqrt{u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$,

$$1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2.$$

2. **a.** Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
   **b.** En déduire la convergence de la suite $(u_n)$.
3. Pour tout entier naturel $n$, on pose

$$v_n = \ln(u_n) - 2.$$

   **a.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   **b.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$,

$$v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}.$$

   **c.** En déduire une expression de $u_n$ en fonction de l'entier naturel $n$.
   **d.** Calculer la limite de la suite $(u_n)$.
4. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite $(u_n)$ si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour $u_0$.
   Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

   **Affirmation 1** : « Si $u_0 = 2018$, alors la suite $(u_n)$ est croissante. »
   **Affirmation 2** : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel $n$, $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$. »
   **Affirmation 3** : « La suite $(u_n)$ est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »

## Exercice 12 (Vrai/faux)

### Affirmation 1 :

$$\mathrm{e}^{5\ln 2} \times \mathrm{e}^{7\ln 4} = 2^{19}.$$

### Affirmation 2 :

L'ensemble des solutions de l'inéquation : $0,2\ln x - 1 \leqslant 0$ est l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

### Affirmation 3 :

On considère la fonction $g$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$.

La fonction $g$ est convexe sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

### Affirmation 4 :

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln(x).$$

**Affirmation 3 :** l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

### Affirmation 5 :

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln x - x + 1.$$

**Affirmation A :** La fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $]0\,;\,1[$.
**Affirmation B :** La fonction $f$ est convexe sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
**Affirmation C :** Pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) \leqslant 50$.

## Exercice 13 (synthèse éco)

1. Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;25]$ par

$$f(x) = \frac{x + 2 - \ln(x)}{x}.$$

   **a.** On admet que $f$ est dérivable sur $[1\,;25]$.
   Démontrer que pour tout réel $x$ appartient à l'intervalle $[1\,;25]$,

$$f'(x) = \frac{-3 + \ln(x)}{x^2}.$$

   **b.** Résoudre dans $[1\,;25]$ l'inéquation $-3 + \ln(x) > 0$.
   **c.** Dresser le tableau des variations de la fonction $f$ sur $[1\,;25]$.
   **d.** Démontrer que dans l'intervalle $[1\,;25]$, l'équation $f(x) = 1,5$ admet une seule solution. On notera $\alpha$ cette solution.
   **e.** Déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de $\alpha$ à l'aide de la calculatrice.
2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2 500 pièces électroniques pour des vidéo-projecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques.
   On admet que lorsque $x$ centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est de $f(x)$ euros.
   En utilisant les résultats obtenus à la question **1.** :
   **a.** Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal.
   Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.
   **b.** Déterminer le nombre minimal de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à 1,50 euro.
   **c.** Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ? Justifier.

## Exercice 14 (QCM)

### Question 1 :

L'équation $\ln(2x) = 2$ admet une unique solution $x_0$ sur $\mathbb{R}$. On a :

**a.** $x_0 = 0$ **b.** $x_0 = \dfrac{e^2}{2}$ **c.** $x_0 = \dfrac{\ln 2}{2}$ **d.** $x_0 = 3{,}6945$

### Question 2 :

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2 + 3\ln(x)$.

La tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse 1 a pour équation :

**a.** $y = \dfrac{3}{x}$ **b.** $y = 3x - 1$ **c.** $y = 3x$ **d.** $y = 3x + 2$

### Question 3 :

La fonction $g$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x - \ln x$ est :

**a.** convexe sur $]0\,;\,+\infty[$ **c.** ni convexe ni concave sur $]0\,;\,+\infty[$

**b.** concave sur $]0\,;\,+\infty[$ **d.** change de convexité sur $]0\,;\,+\infty[$

### Question 4 :

On note $g$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = (x+1)\ln(x)$.

**a.** $g'(x) = \dfrac{1}{x}$ **b.** $g'(x) = 1 + \ln(x)$

**c.** $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **d.** $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \ln(x)$

### Question 5 :

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 3x - x\ln x$$

On admet que $f$ est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on désigne par $f'$ sa fonction dérivée.

Pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ on a :

**a.** $f'(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$ **b.** $f'(x) = 3 - \ln x$ **c.** $f'(x) = 2 - \ln x$

### Question 6 :

Soit un nombre réel strictement positif $a$. Parmi ces suites d'inégalités quelle est l'inégalité correcte ?

**a.** $a < \ln a < e^a$ **b.** $e^a < a < \ln a$ **c.** $\ln a < e^a < a$ **d.** $\ln a < a < e^a$

### Question 7 :

La valeur exacte de $\ln\left(10e^2\right)$ est :

**a.** $2\ln(10) + 2$ **b.** $4{,}302\,585\,093$ **c.** $\ln(10) + 2$ **d.** $2\ln(10e)$

### Question 8 :

On désigne par $n$ un nombre entier naturel. L'inégalité $0,7^n \leqslant 0,01$ est réalisée dès que :

**a.** $n \geqslant 12$ **b.** $n \geqslant 13$ **c.** $n \leqslant 13$ **d.** $n \geqslant 70$

### Question 9 :

On résout dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln x + \ln 2 \geqslant \ln(3x - 6)$.

L'ensemble des solutions est :

**a.** $]2\,;\,6]$ **b.** $[6\,;\,+\infty[$ **c.** $]0\,;\,6]$ **d.** $]0\,;\,4]$

## Exercice 15 (Prise d'initiative)

On considère la fonction $f$ définie par

$$f(x) = 2x^2\ln(x)$$

sur $[0{,}2;\,10]$ et on note $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

Le but de cet exercice est de prouver que la courbe $(C_f)$ admet sur $[0{,}2;\,10]$ une seule tangente passant par l'origine du repère.

On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.

1. Montrer que pour $x \in [0{,}2\,;\,10]$, $f'(x) = 2x(2\ln(x) + 1)$.
2. Soit $a$ un réel de $[0{,}2;\,10]$, montrer que la tangente à la courbe $(C_f)$ au point d'abscisse $a$ a pour équation $y = 2a(2\ln(a)+1)x - 2a^2(\ln(a)+1)$.
3. Répondre alors au problème posé.