EXERCICES PRIMITIVES ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice 1 (Calculs des primitives)

Partie 1 :

Calculer les primitives suivantes

1) $f(x) = x^2 + 2x - 7$ 2) $f(x) = \frac{3}{x^2}$ 3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

4) $f(x) = 5x(x^2+3)^4$

5) $f(x) = \frac{7}{(x-1)^4}$ 6) $f(x) = -\frac{4}{\sqrt{x-6}}$ 7) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

8) $f(x) = (6x+3)(x^2+x+1)^5$

9) $f(x) = \frac{-3x^2-2}{(x^3+2x)^4}$ 10) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 11) $f(x) = 2xe^{x^2}$

12) $f(x) = e^{-x}$ 13) $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

14) $i(x) = e^{2x}(1+e^{2x})^5$ 15) $f(x) = (x-1)e^{x^2-2x+5}$

16) $f(x) = e^x - 2x + 1$ 17) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ 18) $f(x) = \sin(x)e^{\cos(x)}$

19) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ 20) $f(x) = \frac{1}{x-4}$ 21) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

22) $f(x) = \frac{1}{xln(x)}$ 23) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ 24) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

25) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$

Partie 2 :

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1) $f : x \mapsto x^2 + x^3$ sur $\mathbb{R}$
2) $f : x \mapsto \frac{1}{x} + 1$ sur $]0;+\infty[$
3) $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$
4) $f : x \mapsto \sin(x) - \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$

1) $f : x \mapsto \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 7$ sur $\mathbb{R}$
2) $f : x \mapsto \frac{3}{x^3} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{7}$ sur $]0;+\infty[$
3) $f : x \mapsto x^{-4} + 8x^4$ sur $]0;+\infty[$
4) $f : x \mapsto e^x - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

Partie 3 :

1) $f : x \mapsto 2x(x^2+1)^3$ sur $\mathbb{R}$
2) $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^3+1}$ sur $]-1;+\infty[$
3) $f : x \mapsto \frac{x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$
4) $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ sur $]-\infty;0[$

1) $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1;+\infty[$
2) $f : x \mapsto \sin^2(x)\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$
3) $f : x \mapsto \frac{\ln(x+3)}{x+3}$ sur $]-3;+\infty[$
4) $f : x \mapsto e^{-3x+3}$ sur $\mathbb{R}$

Partie 4 :

1) $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$
2) $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]-\infty;0[$
3) $f : x \mapsto \cos(x)e^{\sin(x)}$ sur $\mathbb{R}$
4) $f : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$ sur $]1;+\infty[$

Partie 5 :

Calculer une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiquée.

1) $f(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$ $I =]-\infty;1[$
2) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ $I =]-\pi;0[$
3) $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}$ $I =]0;+\infty[$
4) $f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ $I =]0;+\infty[$
5) $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$ $I =]0;+\infty[$
6) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $I =]0;+\infty[$
7) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ $I =]1;+\infty[$
8) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $I = \mathbb{R}$

Partie 6 :

f désigne une fonction rationnelle définie sur un intervalle I. Déterminer une primitive de f à l'aide de la décomposition proposée

1) $f(x) = \frac{4x+5}{2x+1}$ $I = \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$. Montrer que $f(x) = a + \frac{b}{2x+1}$

2) $f(x) = \frac{2x^2-3x-4}{x-2}$ $I =]2;+\infty[$. Montrer que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

3) $f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3}$

a) $I =]3;+\infty[$ b) $I =]-3;3[$ c) $I =]-\infty;-3[$

Exercice 2 (Calculer la primitive)

Partie 1 :

Pour les exercices suivants , trouver la primitive F, de la fonction f, qui vérifie la condition donnée sur un intervalle I à préciser.

1) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4x + 1,\ F(2) = 0$

2) $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + x,\ F(1) = 0$

3) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2},\ F(0) = 0$

4) $f(x) = -\dfrac{1}{3-x},\ F(1) = 1$

5) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2},\ F(0) = 0$

6) $f(x) = e^{3x+1},\ F(-1) = 0$

7) $f(x) = xe^{-x^2},\ F(\sqrt{\ln 2}) = 1$

8) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1},\ F(2) = 0$

9) $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right),\ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

10) $f(x) = \cos x \sin^2 x,\ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

11) $f(x) = 2\cos\dfrac{x}{2} - 3\sin\dfrac{x}{2},\ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

Partie 2 :

Dans chacun des cas suivants :

1) déterminer les primitives de chacune des fonctions sur l'intervalle donné ;

2) déterminer la primitive F vérifiant la condition donnée.

a) $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(1) = 1$.

b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$ avec $F(2) = 0$.

c) $f : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(0) = 1$.

d) $f : x \mapsto x^2 + 1 + \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(1) = \ln(2)$.

Exercice 3 (Une primitive ?)

Partie 1 :

Prouver dans les cas suivantes que la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I.

1) $f(x) = \dfrac{2(x^4-1)}{x^3}$; $F(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$; $I =]0;+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$; $F(x) = x - \ln(1+e^x)$; $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$; $F(x) = \ln(\ln x)$; $I =]1;+\infty[$

4) $f(x) = \cos x - x\sin x$; $F(x) = x\cos x$; $I = \mathbb{R}$

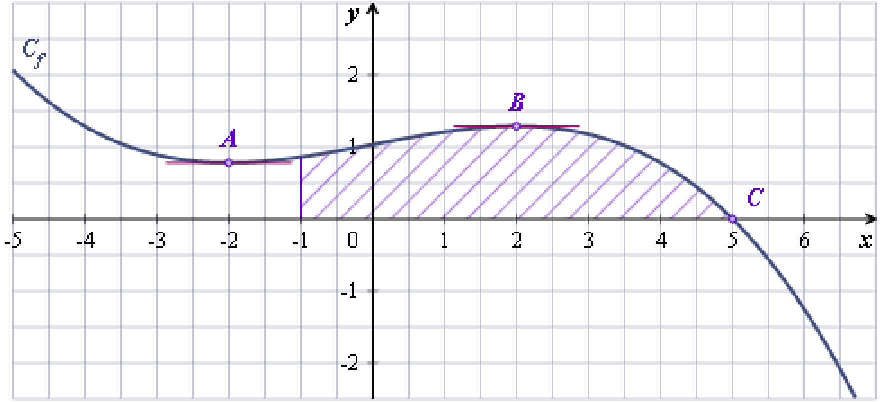
Partie 2 :

1) Prouver que $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de $f(x) = \ln x$ sur $]0;+\infty[$

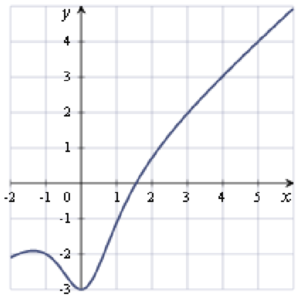
2) Prouver que $F(x) = (x-1)e^x$ est une primitive de $f(x) = xe^x$ sur R

Partie 3 :

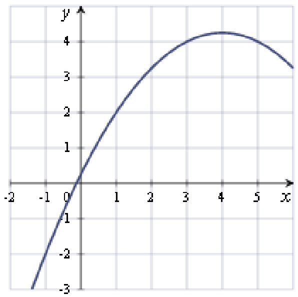
La courbe C_f tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note F une primitive de la fonction f.



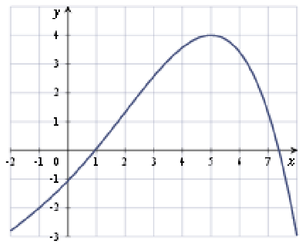
1. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la primitive F.
   Déterminer la courbe associée à la fonction F.



Courbe C_1



Courbe C_2



Courbe C_3

Exercice 4 (Résoudre une équation différentielle y'=ay+b)

Partie 1 :

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

1) $y' + 2y = 0$ 2) $y' - 7y = 0$ 3) $y' - \frac{1}{3}y = 0$

4) $y' = 5y$ 5) $y = -2y'$ 6) $-2y = 3y'$

Partie 2 :

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

1) $y' + 4y = 3$ 2) $y' - 3y = -2$ 3) $y' + 2y = 4$

4) $y' = -4y + 2$ 5) $5y' - 3y - 2 = 0$ 6) $-2y' + 1 = -3y$

7) $y' = -\sqrt{2}y + 1$ 8) $\frac{1}{3}y' - y + \pi = 0$ 9) $-7y' + 4 = y$

Partie 3 :

1) Trouver la solution f de $y' + 3y = -5$ telle que $f(0) = -5$
2) Trouver la solution f de $2y' - 4y = 0$ telle que $f(\ln 3) = 0$
3) Trouver la solution f de $4y' = y - 8$ telle que $f(1) = 8$
4) Trouver la solution f de $-6y' - 18y = -9$ telle que $f(-2) = 0$

Exercice 5 (Résoudre une équation différentielle y'=ay+f(x))

Partie 1 :

On cherche à résoudre l'équation (E) : $y' - 3y = -9x - 12$

1) Déterminer les solutions de $y' - 3y = 0$
2) Montrer que $g(x) = -9x - 9$ est solution de (E)
3) En déduire les solutions de (E)
4) Quelle la solution f de (E) telle que f(0) = 4

Partie 2 :

On cherche à résoudre l'équation (E) : $y' + y = (x + 6)e^x$

1) Déterminer les solutions de $y' + y = 0$
2) Montrer que $g(x) = 3xe^x$ est solution de (E)
3) En déduire les solutions de (E)
4) Quelle la solution f de (E) telle que f(ln 2) = 4

Partie 3 :

On cherche à résoudre l'équation (E) : $y' + 2y = x^2 + 4$

1) Déterminer les solutions de $y' + 2y = 0$
2) Déterminer la fonction du second degré solution de (E)
3) En déduire les solutions de (E)
4) Quelle la solution f de (E) telle que f(-3) = 1

Partie 4 :

On cherche à résoudre l'équation (E) : $y' + 2y = (x + 1)e^{-x}$

1) Déterminer les solutions de $y' + 2y = 0$
2) Déterminer la fonction de la forme $(ax + b)e^{-x}$ solution de (E)
3) En déduire les solutions de (E)
4) Quelle la solution f de (E) telle que f(0) = 4

Partie 5 :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = -5e^{-2x}$ où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 2y = 0$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5xe^{-2x}$. Démontrer que la fonction g est une solution de (E).

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

Exercice 6 (Synthèse)

Partie 1 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;4]$ par

$$f(x) = (3x - 4)e^{-x} + 2.$$

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.
Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;4]$,
$f'(x) = (7 - 3x)e^{-x}$.

2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;4]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Toutes les valeurs du tableau seront données sous forme exacte.

3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;4]$.

b. Donner à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 0,01 près.

4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0;4]$ par

$$F(x) = (1 - 3x)e^{-x} + 2x.$$

a. Montrer que F est une primitive de f sur $[0;4]$.

Partie 2 :

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x\left(x^2-1\right)}.$$

   a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$:

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

   b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

   Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

Partie 3 :

Une entreprise vend des voitures télécommandées. La vente mensuelle varie entre 1 000 et 5 000 voitures.
Une étude montre que la recette mensuelle totale de l'entreprise est de 70 000 euros lorsqu'elle vend 1 000 voitures.
On note $r(x)$ la recette mensuelle réalisée par l'entreprise, exprimée en dizaine de milliers d'euros, pour la vente de x milliers de voitures.

1. Donner $r(1)$.
2. On admet que, pour tout $x \in [1\,;\,5]$, la recette mensuelle est modélisée par :

$$r(x) = 6 + x + 2\ln(x).$$

   a. Montrer que, pour tout $x \in [1\,;\,5]$,

$$r'(x) = \frac{x+2}{x}$$

   b. Étudier les variations de r sur l'intervalle $[1\,;\,5]$.

3. a. Justifier que l'équation $r(x) = 10$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;\,5]$, puis donner une valeur approchée de α au millième.

   b. Déterminer le nombre minimal de voitures télécommandées vendues à partir duquel l'entreprise réalise une recette supérieure à 100 000 euros.

4. a. Soit g la fonction définie pour tout $x \in [1\,;\,5]$ par $g(x) = 2\ln(x)$.
   Montrer que la fonction G définie pour tout $x \in [1\,;\,5]$ par

$$G(x) = 2x[\ln(x) - 1]$$

   est une primitive de la fonction g.

   b. En déduire une primitive $\mathbb{R}$ de la fonction r sur l'intervalle $[1\,;\,5]$.

Partie 4 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par
   $F(x) = x\ln x - \ln x$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.
5. Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.
6. Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ qu'on note α.
7. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Exercice 7 (synthèse maths)

Partie 1 :

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (1) : $y' + y = 2\mathrm{e}^{-x}$, dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x, dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' + y = 0$.
2. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$. Vérifier que h est solution de l'équation (1).
3. On admet que toute solution de (1) s'écrit sous la forme $g + h$, où g désigne une solution de l'équation (2).
   a. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).
   b. Déterminer la solution f de l'équation (1) vérifiant la condition initiale $f(0) = -1$.

Partie B. Étude d'une fonction exponentielle

On note f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. Unités graphiques : 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

1. Étude des limites.
   a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. En écrivant, pour tout réel x, $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
   Quelle conséquence graphique peut-on en tirer pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. étude des variations de f

   a. Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f, puis démonter que, pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de $(-2x+3)$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f

3. Représentations graphiques.

   a. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

   b. Déterminer une équation de chacune des tangentes (T) et (T') à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Partie 2 :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = a\cos x + b\sin x$$

soit une solution f_0 de (E).

b. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$.

c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).

d. En déduire les solutions de (E).

e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

c. Tracer (T), (T') et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie C. Détermination d'une primitive

1. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie 3 :

On considère l'équation différentielle

$$y'(t) + 0,19y(t) = 0,38,$$

où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et y' la fonction dérivée de la fonction y.

a. Déterminer les solutions sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle

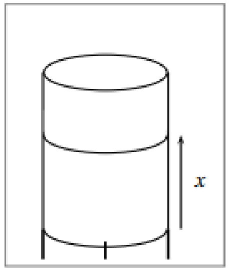
$$(E_0) \qquad y' + 0,19y = 0.$$

b. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $h(t) = c$, où c est un nombre réel.
Déterminer le nombre réel c pour que la fonction h soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Partie 4 :

On s'intéresse à la fonction donnant la pression (en kilo pascals) exercés sur le fond du silo en fonction de la hauteur x (en mètres) de grains contenus dans le silo.



On admet que cette fonction vérifie l'équation différentielle (E) :

$$(E): \quad y' + 0,175y = 8,365.$$

Dans cette équation, y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 0,175y = 0$
2. Déterminer le réel a tel que la fonction g, définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = a$, soit une solution particulière de l'équation (E)
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la fonction p définie sur $[0; +\infty[$ solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $p(0) = 0$

Exercice 8 (synthèse concret)

Partie 1 :

On fait absorber à un animal un médicament dosé à 1 mg de principe actif. Ce médicament libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. On appelle $g(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant t exprimé en heures ($t \geqslant 0$).
On constate expérimentalement que la fonction g est solution de l'équation différentielle

$$(E): \qquad y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}.$$

1. On considère l'équation différentielle

$$(E'): \qquad y' + \frac{1}{2}y = 0$$

   a. Déterminer le réel a pour que la fonction u définie par l'équation $u(t) = ate^{-\frac{1}{2}t}$ soit solution de l'équation (E).

   b. Montrer qu'une fonction v est solution de l'équation (E) si, et seulement si, la fonction $h = v - u$ est solution de l'équation (E').

   c. Résoudre l'équation (E').

   d. En déduire les solutions de l'équation (E).

Partie 2 :

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t, où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.
On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$10v'(t) + v(t) = 30.$$

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que $v(0) = 0$.

1. Démontrer que $v(t) = 30\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right)$.
2. **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   b. Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.
3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à 0,1 m.s^{-2}. Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.

Partie 3 :

On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_1) \qquad y' = \frac{y}{4}.$$

a. Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b. Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.

c. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

Partie 3 :

Le clinker est un constituant du ciment qui résulte de la cuisson d'un mélange composé de calcaire et d'argile. La fabrication du clinker nécessite des fours à très haute température qui libèrent dans l'air une grande quantité de dioxyde de carbone (CO_2).
Dans une cimenterie, la fabrication du clinker s'effectue de 7 h 30 à 20 h, dans une pièce de volume 900 000 dm^3.
À 20 h, après une journée de travail, le taux volumique de CO_2 dans la pièce est de 0,6 %.

1. Justifier que le volume de CO_2 présent dans cette pièce à 20 h est de 5 400 dm^3.
2. Pour diminuer ce taux de CO_2 durant la nuit, l'entreprise a installé dans la pièce une colonne de ventilation. Le volume de CO_2, exprimé en dm^3, est alors modélisé par une fonction du temps t écoulé après 20 h, exprimé en minutes. t varie ainsi dans l'intervalle $[0;\,690]$ puisqu'il y a 690 minutes entre 20 h et 7 h 30.
   On admet que cette fonction V, définie et dérivable sur l'intervalle $[0;\,690]$ est une solution, sur cet intervalle, de l'équation différentielle

   $$(E) : y' + 0{,}01\,y = 4{,}5.$$

   a. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).
   b. Vérifier que pour tout réel t de l'intervalle $[0;\,690]$, $V(t) = 4950\mathrm{e}^{-0{,}01t} + 450$.
3. Quel sera, au dm^3 près, le volume de CO_2 dans cette pièce à 21 h ?
4. Les responsables de la cimenterie affirment que chaque matin à 7 h 30 le taux de CO_2 dans cette pièce est inférieur à 0,06 %.
   Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.
5. Déterminer l'heure à partir de laquelle le volume de CO_2 dans la pièce deviendra inférieur à 900 dm^3.

Partie 4 :

Le stimulateur cardiaque est un appareil destiné à certaines personnes dont le rythme du cœur est devenu trop lent. Implanté sous la peau, l'appareil envoie des impulsions électriques régulières au cœur lorsque le rythme cardiaque est insuffisant.
Un stimulateur cardiaque est constitué de deux composants :

- un condensateur de capacité C égale à 4×10^{-7} farad ;
- un conducteur ohmique de résistance R égale à 2×10^{6} ohms.

Une fois le condensateur chargé, la tension à ses bornes est égale à 5,6 volts. Il se décharge ensuite dans le conducteur ohmique.

Partie A

La tension u, en volts, aux bornes du condensateur est une fonction du temps t, en secondes. On admet que $u(0) = 5{,}6$ et que cette fonction u, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty]$, vérifie pour tout nombre t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty]$ la relation :

$$u'(t) + \frac{1}{RC} \times u(t) = 0,$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

1. **a.** Vérifier que la fonction u est solution sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty]$ de l'équation différentielle $y' + 1{,}25y = 0$.
   b. Résoudre l'équation différentielle $y' + 1{,}25y = 0$.
   c. Montrer que pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty]$, on a : $u(t) = 5{,}6\,\mathrm{e}^{-1{,}25t}$.
2. **a.** Étudier mathématiquement le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty]$.
   b. Ce résultat était-il prévisible. Justifier la réponse.

Exercice 9 (Approfondissements)

Partie 1 :

Partie I

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_n) \qquad y' + y = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :

$$g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

   a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel,

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

   b. En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$.
   Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

   a. Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :

$$(\mathrm{F}) \qquad y' + y = 0.$$

   b. Résoudre (F).

   c. Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n).

   d. Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

Le but de cette partie est de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} \quad \text{(on rappelle que par convention} \quad 0! = 1).$$

1. On pose, pour tout x réel,

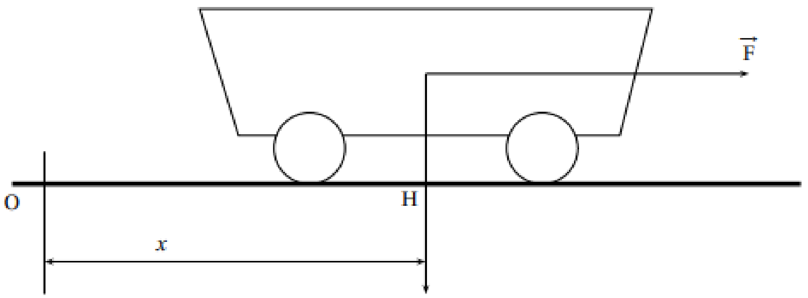
$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x}, \ f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

   a. Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

   b. Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.
   En utilisant la **Partie I**, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geqslant 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

Partie 2 :



Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles ? la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 N.m^{-1}.s.
La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement

$$(\mathrm{E}) \qquad 25x' + 200x'' = 50, \text{ où}$$

x' est la dérivée de x par rapport au temps t,
x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.

1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$.
   Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $\quad v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$.
   Résoudre l'équation différentielle (F).
2. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.
   a. Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.
   b. En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif,
   $x(t) = 2t - 16 + 16\mathrm{e}^{\frac{-t}{8}}$.
3. Calculer $\mathrm{V} = \lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale à 90 % de sa valeur limite V ?
4. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ?
   On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

Partie 3 :

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.
On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad ; \quad y' = \frac{1}{20}y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.
   a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :
   $$(E_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$
   b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).
2. Montrer que g est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.
3. Étudier les variations de g sur $[0 ; +\infty[$.
4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.
5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

Exercice 10 (Vrai/faux)

Affirmation 1 :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2 - 2y$.
On appelle u la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $u(0) = 0$.
Proposition 2 : « On a $u\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ».

Affirmation 2 :

Si f est solution de l'équation différentielle $y' = -2y + 2$ et si f n'est pas une fonction constante, alors la représentation de f dans un repère du plan, n'admet aucune tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Affirmation 3 :

. **Affirmation 1 :** si une fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est solution de l'équation $y' + 3y = 6$ alors la courbe représentant f admet une asymptote horizontale en $+\infty$.

Affirmation 4 :

. Soit f la fonction solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -y + 2$ telle que $f(\ln 2) = 1$.
Proposition 1 : « La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 0, une tangente d'équation $y = 2x$ « .

Affirmation 5 :

« La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 + 3x + 1\right)e^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)e^x$ ».

Exercice 11 (QCM)

Question 1 :

La solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

Réponse (1) : $f(x) = -2e^{-2x} + 3$ Réponse (2) : $f(x) = -2e^{2x} + 3$ Réponse (3) : $f(x) = -2e^{-2x} - 3$

Question 2 :

L'équation différentielle $y = 2y' - 1$ a pour ensemble de solutions :

a. $x \mapsto ke^{2x} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$	**b.** $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} + 1$ avec $k \in \mathbb{R}$	**c.** $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$	**d.** $x \mapsto ke^{2x} + \frac{1}{2}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Question 3 :

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x)$.
Une primitive de g sur $]0; +\infty[$ est la fonction G définie par :

A. $G(x) = \ln(x)$	**B.** $G(x) = x\ln(x)$
C. $G(x) = x\ln(x) - x$	**D.** $G(x) = \frac{1}{x}$

Question 4 :

On considère l'équation différentielle $y' - 3y = 2$, où y désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des réels.
Une solution f de cette équation est la fonction de la variable x vérifiant pour tout réel x :

a. $f(x) = 2e^{-3x}$ **b.** $f(x) = e^{3x} + \frac{2}{3}$ **c.** $f(x) = e^{\frac{2}{3}x}$ **d.** $f(x) = e^{3x} - \frac{2}{3}$