FONCTIONS - GENERALITES

Définition– Vocabulaire :
Une fonction f associe à chaque réel x, d'un ensemble de nombres, un seul nombre que l'on note **f(x).**

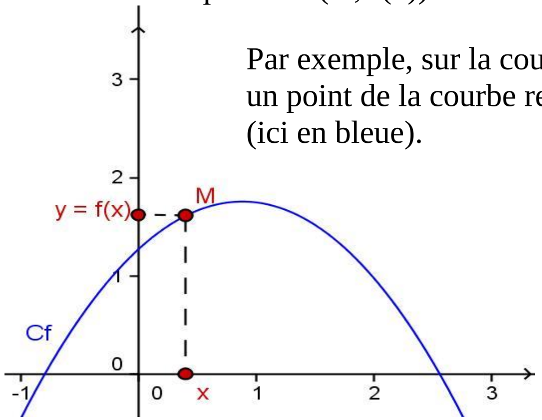
L'ensemble des nombres sur lequel est définie la fonction s'appelle **l'ensemble de définition** de f que l'on note D_f

On dit que x a pour **image** f(x) par la fonction f. Pour un x donné, il existe une image et une seule !
On dit que x est un **antécédent** de f(x) par la fonction f. Pour une valeur f(x) donnée, il existe un ou des antécédents !

Représentations
Expression algébrique :c'est ce qu'on connaît le plus souvent de la fonction, c'est l'expression de f(x) en fonction de x. *Ex : f(x) = 3x + 2*

Courbe :La courbe représentative de la fonction f (notée C_f) correspond à l'ensemble des points M(x ; f(x)) dans un repère.

Par exemple, sur la courbe ci-contre, M est un point de la courbe représentative de f (ici en bleue).



Pour calculer une image ou un antécédent, il est préférable d'utiliser la formule plutôt que la courbe de la fonction car le résultat est plus précis.

Tableau :Une ligne représente les antécédents et l'autre ligne représente les images associées. Avec un tableau on ne peut connaître qu'un nombre fini de valeurs.

Exemple :

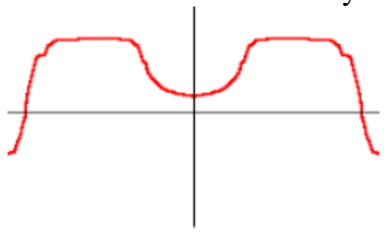
x	-2	3	4	8
f(x)	4	-3	2	1

Signe d'une fonction :
Algébriquement : f positive sur I ↔Pour tout x de I, $f(x) \geq 0$
f négative sur I ↔Pour tout x de I, $f(x) \leq 0$
Graphiquement :
f positive sur I ↔ Courbe au dessus de l'axe des abscisses
f négative sur I ↔ Courbe en dessous de l'axe des abscisses

Tableau de signes :

x	-6		-5		-3		3		5
f(x)		-	0	+	0	-	0	+	

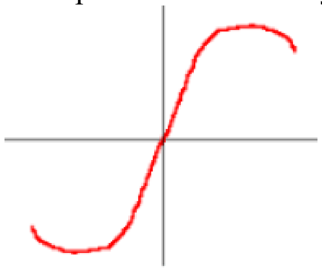
Parité :
f est définie sur un intervalle I centré en 0. x ∈ I
Fonction paire :
Algébriquement :Une fonction f est paire sur I ↔$f(-x) = f(x)$
Graphiquement : L'axe des ordonnées est axe de symétrie


Une fonction paire

<u>Fonction impaire :</u>

<u>Algébriquement :</u> Une fonction f est paire sur I $\leftrightarrow f(-x) = -f(x)$

<u>Graphiquement :</u>L'origine du repère est centre de symétrie



Une fonction impaire

<u>Sens de variation</u> Soient a et b deux réels de I

Graphiquement, f est **croissante,** sur un intervalle I, si la courbe **« monte »**

f est croissante sur I ↔Si **a < b alors f(a) ≤ f(b)**

f est strictement croissante sur I ↔Si **a < b alors f(a) < f(b)**

Graphiquement, f est **décroissante,** sur un intervalle I, si la courbe **« descend »**

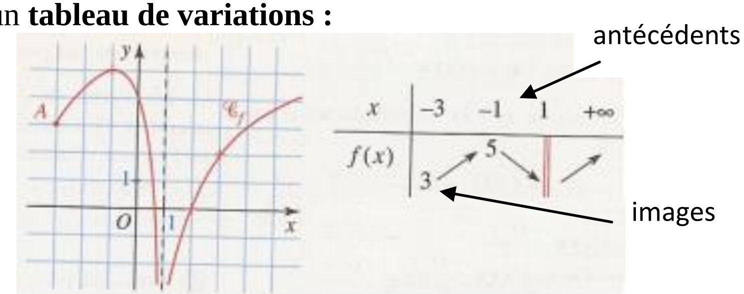
f est décroissante sur I ↔Si **a < b et alors f(a) ≥ f(b)**

f est strictement décroissante sur I ↔Si **a < b et alors f(a) > f(b)**

Graphiquement, f est **constante,** sur un intervalle I, si la courbe **« stagne »**

f est constantesur I ↔Si **a < b et alors f(a) = f(b)**

On résume les variations de f, déterminées à partir de la courbe ou par le calcul, dans un **tableau de variations :**



- Une flèche qui monte signifie que la fonction est croissante
- Une flèche qui descend signifie que la fonction est décroissante

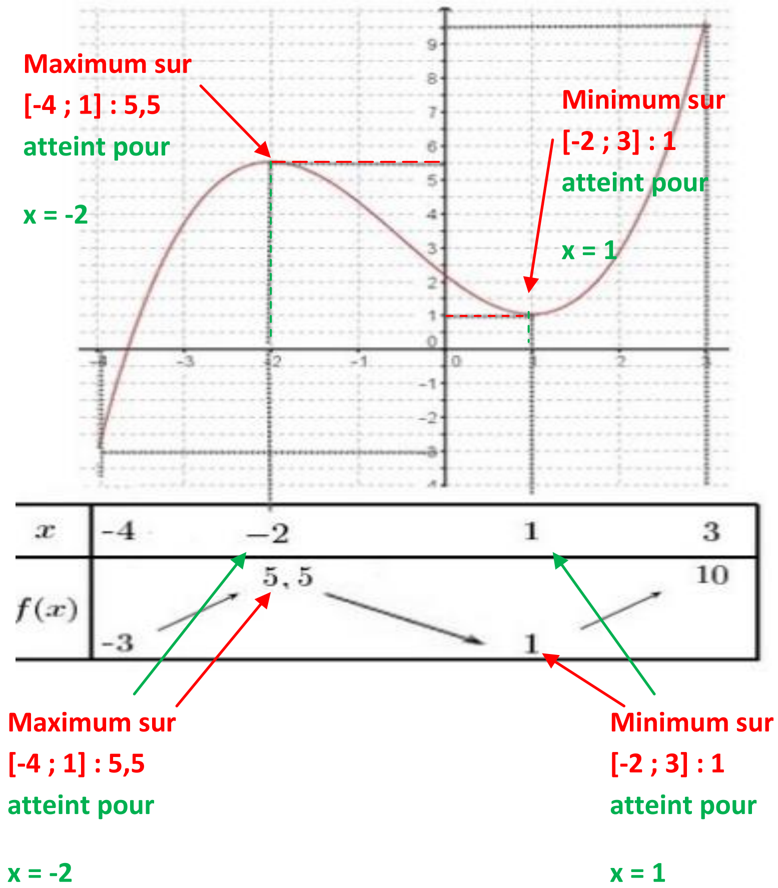
<u>Extremum :</u>

- Le **maximum** M d'une fonction, sur I, est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe sur cet intervalle. C'est l'image la plus grande dans le tableau de variations sur l'intervalle.

Algébriquement, on a pour tout réel x de I, f(x) ≤ M

- Le **minimum** m d'une fonction, sur I, est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe sur cet intervalle. C'est l'image la plus petite dans le tableau de variations sur l'intervalle.

On a pour tout réel x, f(x) ≥ m



Lien variations et signes

x	-5	-3	1	α	6
$f(x)$	4 ↘	1 ↗	3 ↘	0 ↘	-3
x	-5			α	6
$f(x)$	+			**0**	-

Algorithmes :

Recherche d'un extremum sur un intervalle I = [a ; b] par balayage

On divise l'intervalle en N parties égales

On « balaie » les valeurs que peut prendre f(x), en calculant par pas de $\frac{b-a}{N}$, les valeurs de f(x). A chaque fois que l'on trouve une valeur plus petite ou plus grande que la valeur la plus petite (ou grande) trouvée précédemment, on la stocke dans une variable.

Langage naturel	Python

Fonction bayalage(N, a, b)
mini ← $f(a)$
maxi ← $f(a)$
pas←(b-a)/N
x←a
Pour i allant de 1 à N
x←x+pas
y←f(x)
si y > maxi alors
maxi ← y
Finsi
si y < mini alors
mini ← y
Finsi
Fin Pour
Renvoyer (mini ; maxi)
	`def bayalage(N,a,b):`
	`    mini=f(a)`
	`    maxi=f(a)`
	`    pas=(b-a)/N`
	`    x=a`
	`    for i in range(1,N+1):`
	`        x=x+pas`
	`        y=f(x)`
	`        if y>maxi:`
	`            maxi=y`
	`        if y<mini:`
	`            mini=y`
	`    return(mini,maxi)`

Recherche une solution à l'équation f(x) = k sur un intervalle I = [a ; b] tel que f soit monotone sur I par dichotomie

- On prend pour exemple le cas où f est croissante sur I
- Résoudre l'équation f(x) = k revient à résoudre f(x)-k = 0
- On prendre la valeur m située au milieu de l'intervalle [a ; b] et on calculer f(m).
- Si f(m) < k alors la solution de l'équation se trouve dans l'intervalle [m ; b]
- Sinon, la solution de l'équation se trouve dans l'intervalle [a ; m]
- On réitère le processus jusqu'à trouver un encadrement avec la précision souhaitée (10^{-n} près)

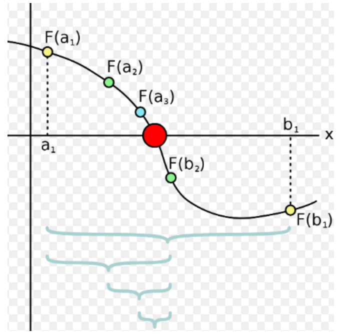


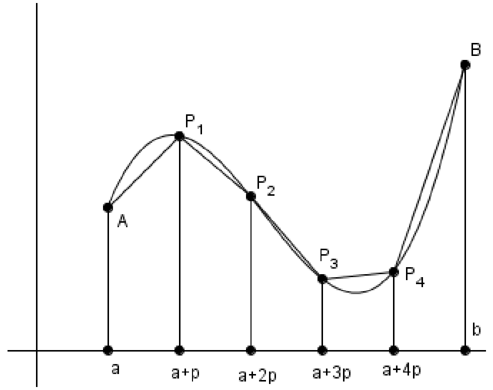
Illustration de la dichotomie

Langage naturel	Python

Fonction dichotomie(n, a, b)
Tant que b-a > 10^{-n}
m←(a+b)/2
si f(m)- k< 0 alors
a←m
sinon
b←m
Finsi
Fin Tantque
Renvoyer (a; b)
	`def dichotomie(n,a,b,k):`
	`    while b-a>10**(-n):`
	`        m=(a+b)/2`
	`        if f(m)-k<0:`
	`            a=m`
	`        else:`
	`            b=m`
	`    return(a,b)`

Estimer la longueur d'une portion de courbe sur un intervalle [a ; b]

Principe : On découpe la courbe en N points que l'on relie par des segments. On approxime la longueur de la courbe en additionnant la longueur des segments.



Langage naturel	**Python**
Fonction approxsegment(N, a, b) S ← 0 pas←(b-a)/N Pour i allant de 1 à N S←S+$\sqrt{pas^2+(f(a)-f(a+pas))^2}$ a←a+pas Fin Pour Renvoyer (S)	see code below

```python
def approxsegment(N,a,b):
   S=0
   pas=(b-a)/N
   for i in range(N):
       S=S+sqrt(pas**2+(f(a)-f(a+pas))**2)
       a=a+pas
   return(S)
```

Méthodes (exercices) :

	Hachette	**Hatier**	**Mes exos**	**Sesamaths**	**Mathx**
A) Déterminer un ensemble de définition			Ex.1		136
B) Calculer une image/antécédent			Ex. 2	124-126	40
C) Lire un graphiquement une image/antécédent/résolution d'équation		36,55,58	Ex. 3	127,128	12-15,31-32
D) Point appartient à la courbe ? – Tracé de courbe		33,34,47,48	Ex. 4	127	
E) Parité d'une fonction	9-15	35,49-51	Ex. 5	129,130	**41-46**
F) Modéliser un problème par une fonction			Ex. 6		44
G) Etudier le signe d'une fonction		84-91	Ex. 7	155,157,158	**19-23**
H) Résoudre graphiquement une inéquation		37-38,69,72	Ex. 8		**24-25**
I) Résoudre algébriquement une inéquation		39-43,92-102	Ex. 9		**31-35**
J) Résoudre f(x)>g(x)		57,61,75	Ex. 10		33,**26**
K) Relier graphique et tableau de variations	17,21,22,26,33,34,38	**33,34,44,48-52**	Ex.11	144	16-20
L) Déterminer un extremum	27,28	**62**	Ex. 12	150	24-27
M)Trouver le signe à partir des variations		**100**	Ex. 13		
N) Encadrer une fonction	23	**35,56-58**	Ex.14	145,151	22-23

Exercices de synthèse :

	Hachette	**Hatier**	**Mes exos**	**Sesamaths**	**Mathx**
Algorithmes	46	**65**	Ex. 15		30,46-47,59,61
synthèse	20,44, 50,54		Ex. 16	137,154	
Problème concret	40,55	63,77,79,116,118,126,127,**46**	Ex. 17	140,141,152	34,35,39,45,57,62,**37-38,56,59,58**
Problème géométrie		117,124,**104**	Ex. 18	138,139,143,153	56,60,**39,40,54-55,57**
QCM			-		71-75,**70-71**
Vrai/faux	19,29	59,70 ,**59,99**	Ex.19		63-66,**60-65**
Approfondissement			-		
Prise d'initiative	52-53		-		51-53,**51-52**

Mathx : chap. 5 **chap 6**

Hatier : chap 1c **chap 2**