METHODES A CONNAITRE – FONCTIONS GENERALITES

Problème A : Déterminer L'ensemble de définition d'une fonction

Questions-types :-Déterminer l'ensemble de définition Df de la fonction f

Procédure :

Lié à un problème mathématique :

1) Identifier l'aspect de la formule de f. Si il n'y a ni quotient, ni racine, le domaine de définition est R.

2) En cas de présence d'une racine du type $\sqrt{u(x)}$: On chercher pour quelles valeurs de x $u(x) \geq 0$
On résout donc $u(x) \geq 0$. Les solutions de l'inéquation génèrent le domaine de définition de f.

3) En cas de présence d'un quotient du type $\frac{1}{u(x)}$: On chercher pour quelles valeurs de x, $u(x) = 0$
On résout donc $u(x) = 0$. Il faut alors exclure les solutions de l'équation à R.

4) En cas de présence de racine et de quotient, il faut cumuler les deux techniques.

Lié à un problème concret :

Suite à certaines contraintes, la modélisation du problème fait que x ne peut prendre que certaines valeurs
Ex : pb économique, si x représente un nombre d'objet produit, x est souvent compris dans un intervalle [a ; b] qui correspond aux limites de la production.

Pour une courbe représentée par un graphique :

Le domaine de définition correspond aux abscisses des points les plus à gauche et à droite de la courbe [a ;b]

Exemples :

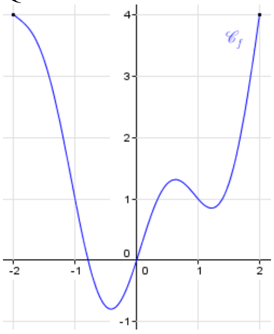
Déterminer l'ensemble de définition, noté D, de $f(x) = 2x + 1$

Déterminer l'ensemble de définition, noté D, de $f(x) = \sqrt{x + 1}$

Déterminer l'ensemble de définition, noté D, de $f(x) = \frac{1}{x+1}$

Déterminer l'ensemble de définition, noté D, de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

2)Soit un segment [AB] de longueur 5 cm et M un point de [AB]. On note x, la distance AM et f(x)=2x+3. Quel est l'ensemble de définition de f ?



3) Quel est l'ensemble de définition de f ? (courbe ci-dessus)

A vous de jouer : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 - 4$b) $g(x) = \sqrt{-2x^2 - 4x + 1}$c) $h(x) = \frac{2}{\sqrt{4-3x}}$

Soit f(x)=2x-3 le bénéfice d'une entreprise. L'entreprise peut produire de 5 à 10 objets manufacturés par mois. Quel est l'ensemble de définition de f ?

Problème B : Calculer une image/un antécédent

Questions-types :- Quel est l'image de 3 par la fonction f ? Calculer f(3)

- *Déterminer le (ou les) antécédents de 6 par la fonction f. Résoudre f(x)=6*

Procédure :$f(x)$ est connue

Faire attention à la formulation de la phrase : Cherche-t-on un antécédent ou une image ?

Calcul d'image d'un nombre k :

- On remplace x par k dans la formule de la fonction et on calcule

Calcul des antécédents d'un nombre k :

- On résout l'équation $f(x) = k$

Une petite phrase de conclusion à la fin

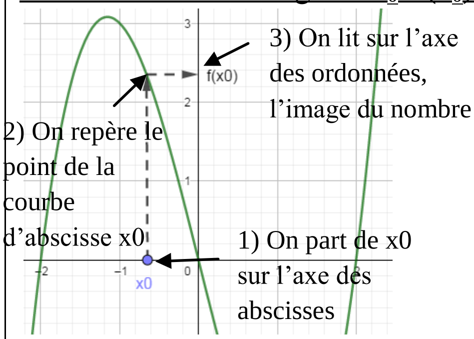
Exemples : Déterminer l'image de -3 par la fonction $f(x) = x^2 - 2x + 1$

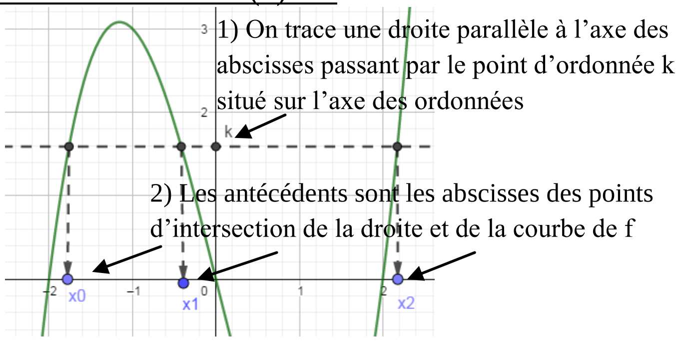
Déterminer le ou les antécédents de 8 par la fonction $f(x) = 3x - 7$
<u>A vous de jouer :</u> Déterminer l'image de $\frac{1}{3}$ par la fonction $f(x) = x^2 - 2x + 1$ Quels sont les nombres dont l'image est -4 par la fonction f(x) = x² -13

Problème C : Lire une image/Lire un antécédent ou résoudre une équation f(x) = k avec un graphe

<u>Questions-types :</u> - A l'aide du graphique, déterminer f(3) , l'image de 7 par f
- A l'aide du graphique, déterminer les antécédents de 6, résoudre f(x) = 8

<u>Procédure :Lire l'image de x_0 /f(x_0) :Lire les antécédents de k /résoudre f(x)=k :</u>

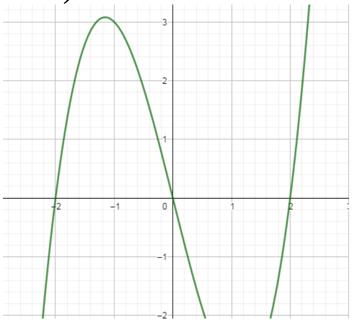




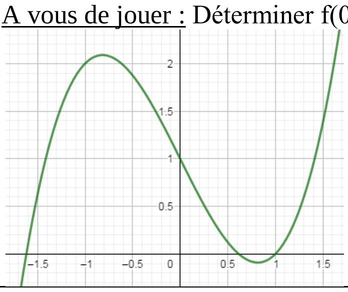
Attention, parfois il n'y a pas de solutions.

<u>Exemples :</u> Soit la fonction f représentée par la courbe ci-dessous :

1) Déterminer l'image de -1 ; Calculer f(0)
2) Déterminer le ou les antécédents de 0 ; résoudre f(x) = 2



<u>A vous de jouer :</u> Déterminer f(0) et résoudre l'équation $f(x) = 1$



Problème D : Déterminer si un point appartient à la courbe représentative d'une fonction/Tracé

<u>Questions-types :</u> - Le point A(2 ;3) appartient-il à la courbe représentative de f ?

<u>Procédure :</u>

<u>Le point A(x_0 ; y_0) appartient-il à la courbe représentative de f ?</u>

- On calcule f(x_0) : Si $f(x0) = y0$ alors oui sinon non

<u>Tracé la courbe représentative de la fonction f définie sur [a ; b]</u>

- Utiliser la calculatrice pour calculer les images de plusieurs nombres compris entre [a ; b] (faire un tableau de valeurs avec la calculatrice avec un pas ni trop grand ni trop petit (avoir une dizaine de points)

X	a	a+pas	…	b
y = f(x)	f(a)	f(a+pas)	…	f(b)

- Choisir une échelle adaptée pour le tracer :
  On prendra une échelle pour l'axe des abscisses qui permet d'avoir le minimum et le maximum
  On prendra une échelle pour l'axe des ordonnées qui permet d'avoir le minimum et le maximum
- Placer les points de coordonnées (a ; f(a)) ; (a+pas ;f(a+pas)) ; etc… et les relier (pas à la règle)

Tracé la courbe représentative de la fonction f définie sur [a ; b] sur la calculatrice :

- Aller dans le menu de tracé de la calculatrice.
- Taper la formule de la fonction et régler l'échelle : Xmin = a Xmax = b Ymin = l'image la plus petite – 1Ymax = l'image la plus grand +1

Exemples :1)Le point A(2 ; -2) appartient-il à la courbe représentative de C_f avec f(x) = 2x-6

2) Tracer la représentation grahique de f(x) = x^3-2x+1 sur [-1,5 ; 1,5]. Faire de même sur la calculatrice et indique l'échelle prise

A vous de jouer :1)Le point A(3 ; -4) appartient-il à la courbe représentative de C_f avec f(x) = x^2+1

2) Tracer la représentation grahique de f(x) = x^2-2x+1 sur [-2 ; 2]. Faire de même sur la calculatrice et indique l'échelle prise

Problème E : Etudier la parité d'une fonction

Questions-types :La fonction f est-elle paire ? impaire ? Etudier la parité de f.

Procédure :

Par le calcul :

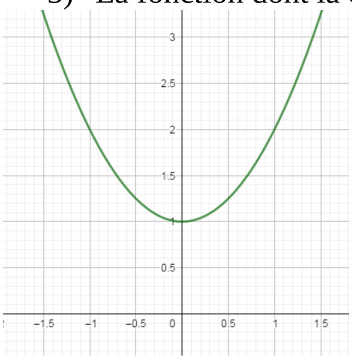
1) Calculer f(-x) (Remplacer x par –x) Rappel : $(-x^n) = x$ si n paire $(-x^n) = -x$ si n impaire
2) Si f(-x) = -f(x) alors f est impaire Si f(-x) = f(x) alors f est paire Sinon f n'est ni paire ni impaire

Graphiquement :

1) Si la courbe représentative de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie alors f est paire
2) Si la courbe représentative de f admet l'origine du repère comme centre de symétrie alors f est impaire
3) Sinon f n'est ni paire ni impaire

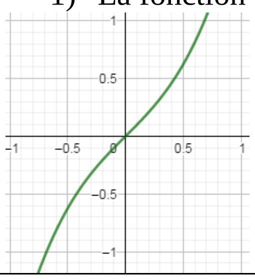
Exemples : 1) Etudier la parité des fonctions : $f(x) = x^2 + 3x^4 + 1$ et $f(x) = x^2 - 2x + 1$

3) La fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous est-elle paire ? Impaire ?



A vous de jouer : : 1) Etudier la parité des fonctions : $f(x) = x^3 - 2x + 1$

1) La fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous est-elle paire ? Impaire ?



Problème F : Modéliser un problème par une fonction

Questions-types : - Exprimer f(x) en fonction de x.

Procédure :

Souvent il s'agit de modéliser l'évolution d'un paramètre en fonction d'un autre que l'on note x afin de trouver un optimum (max ou mini) ou une valeur de x qui permet d'obtenir une valeur fixée.
Il faut souvent une ou plusieurs valeurs à l'inconnu pour essayer de comprendre comment le paramètre évolue avec x et essayer de généraliser le cas avec x… Il faut essayer d'exploiter toutes les données de l'énoncé.
Attention, souvent l'ensemble de définition de la fonction modélisant le problème est limité par des considérations pratiques (non mathématiques)
On peut être amené à modéliser plusieurs types de problèmes :

- **Un problème économique** :
Qui demande souvent de déterminer un bénéfice en fonction d'un nombre x d'objets fabriqués/vendus : Bénéfice = Recette – coût. Souvent la recette est donnée par recette = prix unitaire × x et le coût est donné par une fonction. B(x) = R(x) – C(x). Une entreprise est rentable si son bénéfice est positif….
- **Un problème physique :** Souvent un problème de mécanique et la fonction modélisant le problème est déjà donnée…Il faut juste bien comprendre que f modélise l'altitude du projectile et x (ou t) le temps ou l'abscisse du point
- **Un problème purement mathématique (souvent géométrique)** Dans le cas d'un problème géométrique il s'agit bien souvent de devoir minimiser/maximiser une aire ou une longueur. Il est donc de bon ton de faire une figure annotée !!! Il faut se rappeler d'un certain nombre de formules de base :
Aire d'un rectangle = Largeur × longueur   Aire d'un triangle = base × hauteur /2
Périmètre = Somme des cotés d'une figure.
Pour calculer une longueur dans une figure on peut :
- Utiliser le théorème de Thalès (droites parallèles) $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$
- Utiliser le théorème de Pythagore (droites perpendiculaires) $AB^2 = AC^2 + BC^2$
- Créer un repère et utiliser la formule des longueurs (Pythagore en fait) :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemples :

A) Une entreprise fabrique entre 0 et 10 objets. Un objet est vendu 10 €. Le coût de fabrication de x objets est donné par l'expression C(x) = 3x+1. Déterminer le bénéfice B(x) de l'entreprise en fonction du nombre x d'objets vendus. Quel est le bénéfice maximum ? Pour quelles productions l'entreprise est-elle rentable ? Quel est le bénéfice de l'entreprise si elle produit 9 objets ?
B) On modélise la chute d'une boule de pétanque du haut d'une falaise en fonction du temps t en s par la fonction suivante : $h(t) = t^2+2t+1$. Avec h l'altitude de la boule de pétanque.
Quelle l'altitude initiale de la boule de pétanque ? A quel moment la boule de pétanque touche-t-elle le sol ?
C) On considère un carré ABCD de coté 10. Soit M un point du segment [AB] tel que AM = x et N un point de [AD] tel que DN = x. Exprimer l'aire du triangle AMN en fonction de x.

Problème G : Etudier le signe d'une fonction

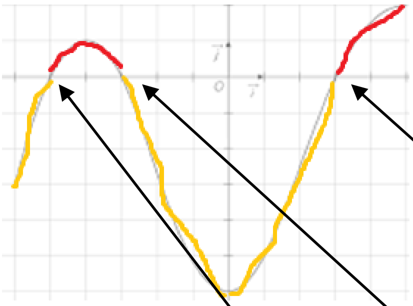
<u>Questions-types :</u> Résoudre le système.

<u>Procédure :</u>

<u>Graphiquement :</u>

f positive sur I ↔ Courbe au dessus de l'axe des abscisses

f négative sur I ↔ Courbe en dessous de l'axe des abscisses



Les points où la courbe traverse l'axe des abscisses sont les points où la fonction s'annule.

<u>Tableau de signes :</u>

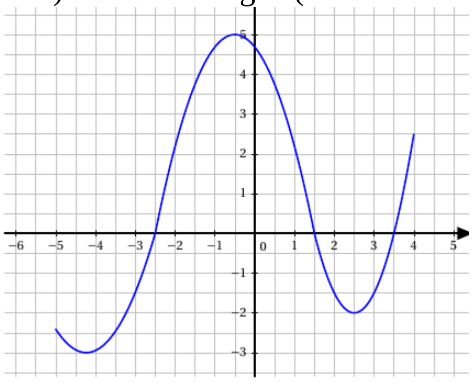
x	-6		-5		-3		3		5
f(x)		-	0	+	0	-	0	+	

<u>Algébriquement :</u>

On résout l'inéquation $f(x) \geq 0$ (voir partie expression algébrique). On en déduit l'intervalle des x où f est positive. Les autres valeurs de x sont les valeurs pour lesquelles f est négative.

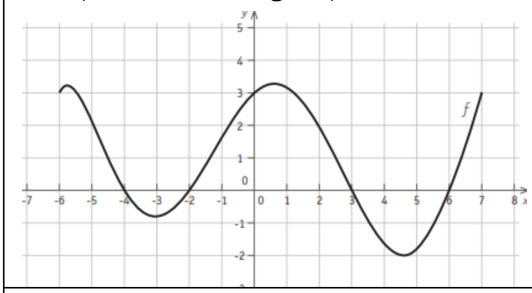
<u>Exemples :</u> 1)Etudier le signe de la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

2) Etudier le signe (sur leur ensemble de définition des fonctions : $g(x) = 3x - 4 \;\; et \;\; h(x) = x^2 - x$



<u>A vous de jouer :</u> 1)Etudier le signe de la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

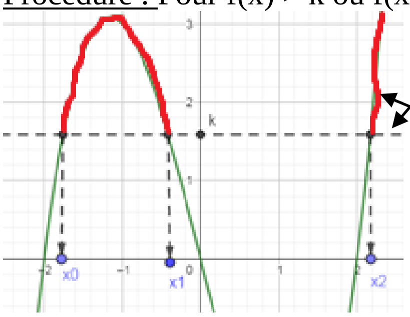
1) Etudier le signe (sur leur ensemble de définition des fonctions : $m(x) = \frac{3x+2}{x+4}$



Problème H : Résoudre graphiquement une inéquation de la forme f(x) > k

<u>Questions-types :</u> Résoudre graphiquement f(x) > k

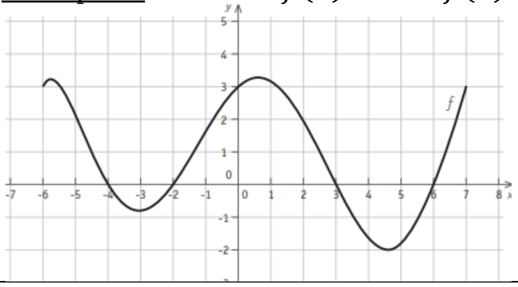
<u>Procédure :</u> Pour f(x) > k ou f(x) ≥ k 1) On trace une droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point d'ordonnée k situé sur l'axe des ordonnées



2) Les abscisses des points en rouge (situés au dessus de la droite) sont solution de l'inéquation. S =]x0 ; x1[∪]x2 ; +∞[

Si l'inéquation est f(x) ≤ k ou f(x) < k on prend les points situés sous la droite

Exemples : Résoudre $f(x) < 2$ et $f(x) \leq 3$



A vous de jouer : Résoudre $f(x) > -1$ et $f(x) \leq 1$

Problème I : Résoudre algébriquement une inéquation

Questions-types : Résoudre, par le calcul, $f(x) > 4$

Procédure :

1) Remplacer f(x) par son expressions algébrique et résoudre l'inéquation (voir méthode algèbre)

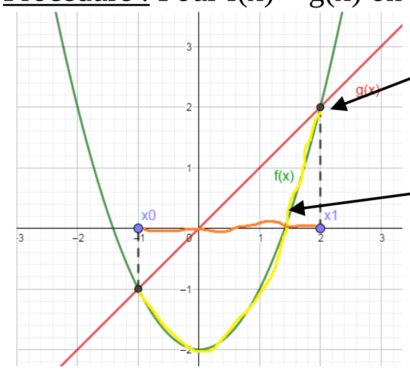
Exemples : Résoudre $f(x) < 2$ avec $f(x) = 3x - 7$

A vous de jouer : Résoudre $f(x) \geq 4$ avec $f(x) = 3 - 5x$

Problème J : Résoudre algébriquement une inéquation de la forme $f(x) < g(x)$

Questions-types : Résoudre graphiquement f(x)<g(x)

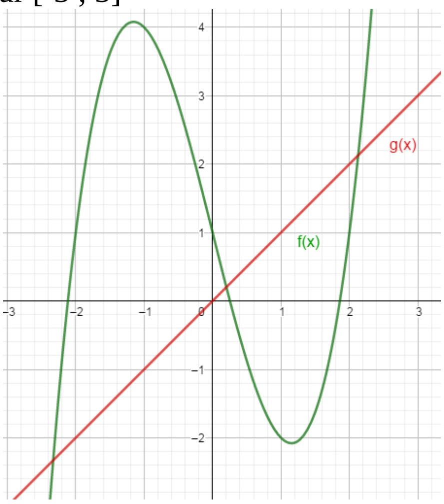
Procédure : Pour f(x) < g(x) on résout sur [-3 ; 3] ici



1) Repérer les points d'intersection entre la courbe représentative de f et la courbe représentative de f
2) Les solutions sont les abscisses des points de la courbe Cf situés en dessous de la courbe Cg (on ne prend pas les points d'intersection car le symbole est « < » strictement inférieur)
3) Conclusion S =]x0 ; x1[

Idem pour résoudre f(x) ≤ g(x) (on prend les intersections) S = [x0 ; x1]
Idem pour résoudre f(x) > g(x) (on prend les points au-dessus et pas les intersections) S = [-3 ; x0[∪]x1 ; 3]
Idem pour résoudre f(x) ≥ g(x) (on prend les points au-dessus et les intersections) S = [-3 ; x0]∪[x1 ; 3]
Pour f(x) = g(x), on prend uniquement les intersections S = {x0 ; x1}
Résolution algébrique :Pour une résolution par le calcul on cherchera à résoudre f(x) – g(x) < 0

Exemples : Résoudre $f(x) < g(x)$ sur [-3 ; 3]

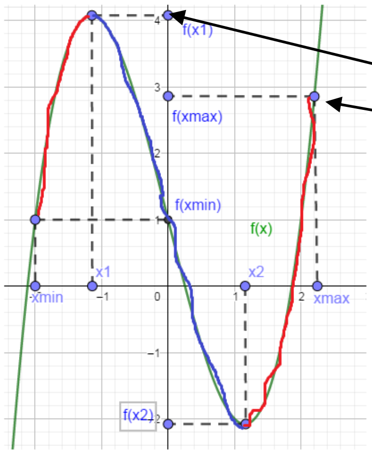


A vous de jouer : Résoudre $f(x) \geq g(x)$ sur [-3 ; 3]

Problème K : Relier graphique et tableau de variations – Dresser un tableau de variations

Questions-types : - A partir de la courbe représentative de f, dresser le tableau de variations de la fonctions

Procédure : Dresser le tableau de variations à partir de la courbe représentative de f (ici sur [xmin ; xmax]



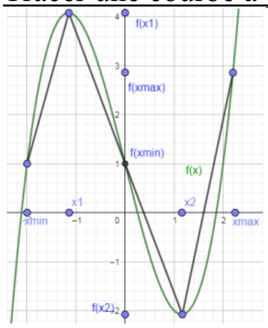
1) Repérer les points de la courbe qui correspondent à des changements de variation (montée vers descente/descente vers montée) ainsi que les points bornes de l'ensemble de définition. Placer les abscisses de ces points dans la première ligne du tableau de variations (dans l'ordre croissant)

2) On place les ordonnées de ces points dans la deuxième ligne mais de telle sorte que :
   - On relie les ordonnées par une flèche qui monte si la courbe monte entre ces deux points.
   - On relie les ordonnées par une flèche qui descend si la courbe descend entre ces deux points

x	x_{min}		x1		x2		xmax
f(x)		↗	f(x1)	↘		↗	f(xmax)
	f(xmin)				f(x2)		

On peut être amené à mettre des doubles barres en cas de présence de « valeurs interdites »

Tracer une courbe à partir d'un tableau de variations



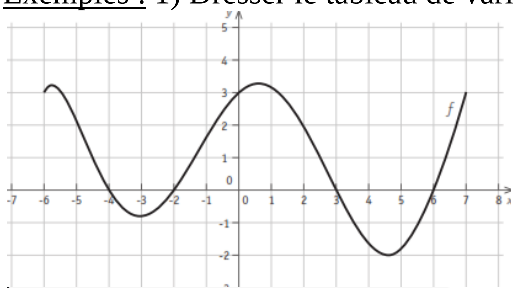
- Dans un repère on place les points données par le tableau (xmin ; f(xmin) ; (x1 ; f(x1)) ; etc…
- On relie les points par une courbe (peut importe sa forme) qui monte (si il y a une flèche qui monte dans le tableau) ou qui descend (si il y a une flèche qui descend dans le tableau)
- Plusieurs courbes sont possibles à partir d'un même tableau de variations

Démontrer le sens de variation d'une fonction par le calcul !

Prouver que f est croissante (resp.décroissante) sur I = [xmin ; xmax] :

- On prend deux réels a et b de I tels que a < b
- On prouve que f(a) < f(b) (resp. f(a) > f(b)) :
  - en résolvant f(a) - f(b) < 0 (resp. f(a) - f(b) > 0)
  - en prouvant étape par étape que f(a) < f(b) (resp. f(a) > f(b)) en utilisant les règles de manipulation des inéquations et les sens de variations des fonctions usuelles

Exemples : 1) Dresser le tableau de variations de f à partir de la courbe ci-dessous



x	-5		2		4		10
f(x)	8	↘		↗	9	↘	
			1				3

2) Tracer une représentation graphique possible de g à partir du tableau de variations ci-dessous

3) Montrer que la fonction $h(x) = x^2 + x$ est croissante sur $[-\frac{1}{2} ; +\infty[$

A vous de jouer : Résoudre $f(x) \geq g(x)$ sur [-3 ; 3]

Problème L : Déterminer un extremum

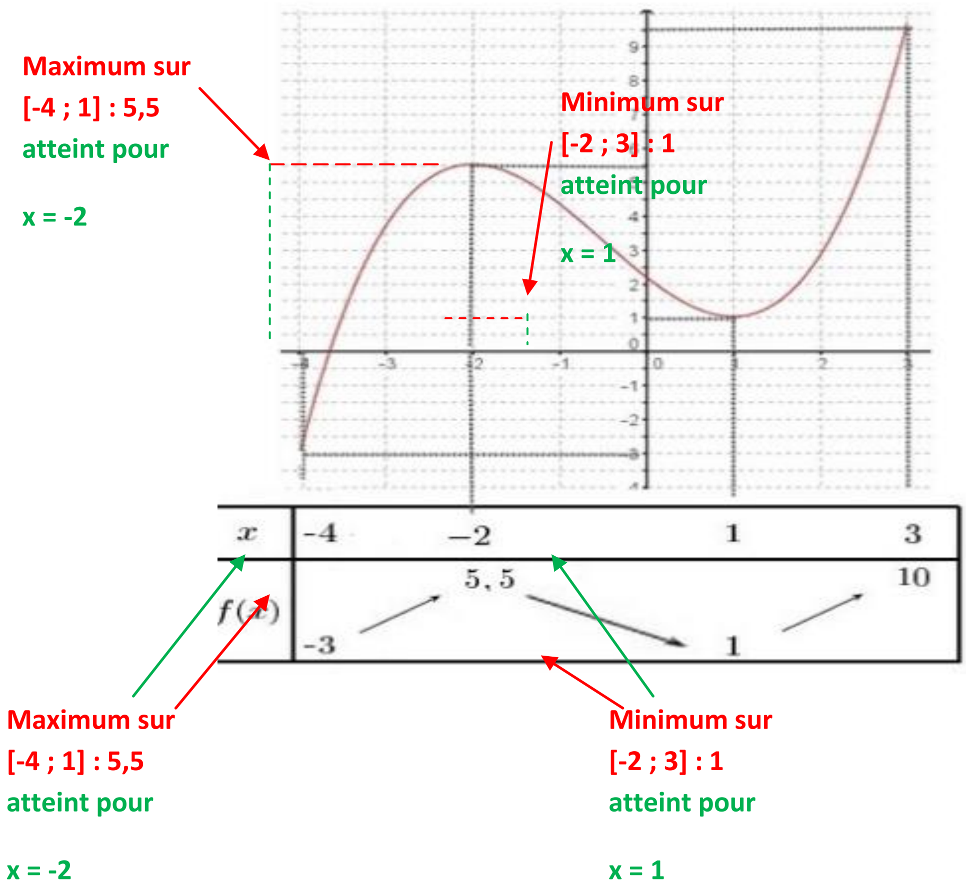
<u>Questions-types :</u> Quel est le maximum de la fonction f ? Pour quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?

<u>Procédure :</u>

<u>Graphiquement ou avec des variations :</u>

- Le **maximum** M d'une fonction, sur I, est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe sur cet intervalle.
C'est l'image la plus grande dans le tableau de variations sur l'intervalle.
Algébriquement, on a pour tout réel x de I, $f(x) \leq M$

- Le **minimum** m d'une fonction, sur I, est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe sur cet intervalle.
C'est l'image la plus petite dans le tableau de variations sur l'intervalle.
On a pour tout réel x, $f(x) \geq m$



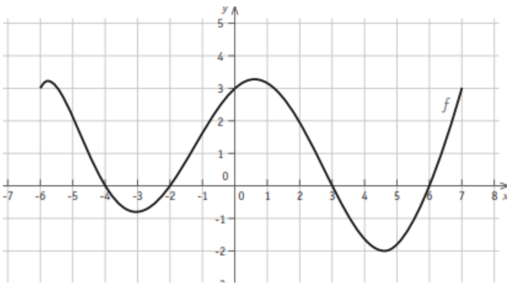
<u>Par le calcul :</u> On note m, le minimum et M le maximum d'une fonction f sur un intervalle I
Pour un maximum (resp. un minimum), on montre que $f(x) \leq M$ (resp. $f(x) \geq m$) pour tout réel x de I en :

- Résolvant l'inéquation $f(x) - M \leq 0$ (resp. $f(x) - m \geq 0$)
- en prouvant étape par étape que $f(x) \leq M$ (resp. $f(x) \geq m$) en utilisant les règle de manipulation des inéquations et les sens de variations des fonctions usuelles

Il faut également trouver le réel x_0 vérifiant $f(x_0) = M$ (resp. $f(x_0) = m$) à l'aide de la calculatrice ou en résolvant l'équation.

<u>Exemples :</u> 1) Déterminer les extremums des fonctions représentées par le graphique et le tableau ci-dessous :

2) Montrer que la fonction $f(x) = x^2 + x$ admet un minimum en $x = -\frac{1}{2}$



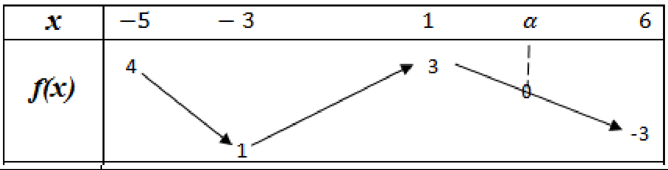
x	-5		2		4		10
$f(x)$	8	↘	1	↗	9	↘	3

<u>A vous de jouer :</u> Résoudre $f(x) \geq 4$ avec $f(x) = 3 - 5x$

Problème L : Trouver le signe à partir d'un tableau de variations

Questions-types : Résoudre graphiquement f(x)<g(x)

Procédure :

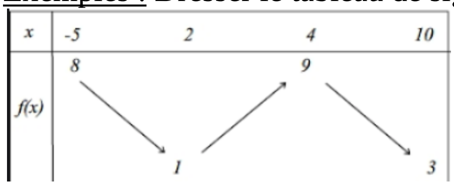


x	−5		α		6
f(x)	+		0	-	

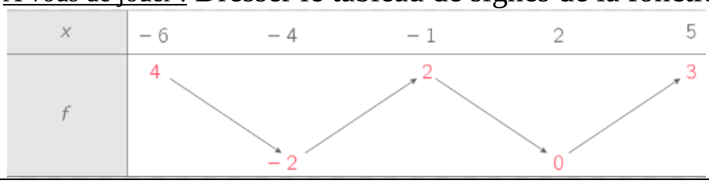
1) Pour chaque intervalle correspondant à une variation, on lit les images des extremités des flèches. Si les images sont de même signe, alors la fonction est du signe de ces nombres.

2) Sinon, cela signifie qu'il existe un nombre x (que l'on note avec une lettre de l'alphabet grec souvent) où la fonction s'annule et il y a par conséquent un changement de signe au niveau de ce nombre (on indique cela par un 0 dans le tableau de signe). On résume tout ça dans le tableau

Exemples : Dresser le tableau de signes de la fonction ci-dessous :



A vous de jouer : Dresser le tableau de signes de la fonction



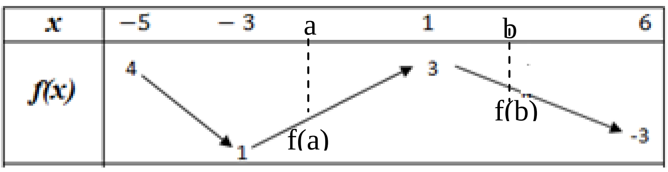
Problème K : Encadrer une fonction à partir d'un tableau de variations

Questions-types : Comparer f(2) et f(4)

Montrer que sur [2 ; 6] ; -3≤ f(x)≤ 4

Procédure :

Encadrer une fonction sur un intervalle [a ; b] :



1) Placer a et b dans la première ligne du tableau de variations (approximativement)

2) Placer f(a) et f(b) en pointillés dans le tableau et en déduire un encadrement en déterminant la plus grande valeur que f peut prendre dans cette intervalle et la plus petite

Comparer les images de deux nombres f(a) et f(b) avec a < b

1) Place a et b dans la première ligne du tableau de variations (approximativement)

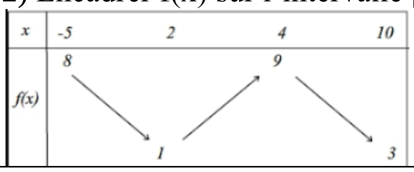
2) - Si a et b sont situés dans un intervalle où la fonction est monotone alors f(a) < f(b) (si f croissante) et f(a) > f(b) si f décroissante)

- Si a et b ne sont pas situés dans un même intervalle de monotonie, encadrer f(a) et f(b) avec les images des bornes de l'intervalle. Si les deux encadrements sont disjoints, on peut trancher, sinon on ne peut pas comparer les deux nombres

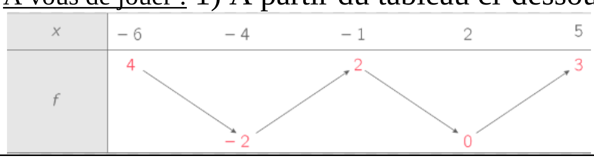
- Si f(a) ou f(b) est un minimum/maximum alors il est nécessairement plus petit/grand que les autres images…

Exemples : 1) A partir du tableau ci-dessous, comparer f(3) et f(3,4) ; f(4) et f(-4) ; f(-3) et f(3)

2) Encadrer f(x) sur l'intervalle [2 ; 10]



A vous de jouer : 1) A partir du tableau ci-dessous, comparer f(0) et f(1) ; f(-5) et f(4) ; f(-4) et f(3)



2) Encadrer la fonction f sur [-1 ; 5]