

LOGARITHME NEPERIEN - COURS

Expression algébrique : $f(x) = \ln x$

Domaine de définition : $D_f =]0 ; +\infty[$

Tableau de signes :

x	0	1	+	+	+
ln x		-	0	+	

Opérations : Pour tout réels a et b > 0 et pour tout entier relatif n

Multiplication : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ Division : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Inverse : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

Puissance : $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$ Racine : $\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \times \ln(a)$

Valeurs remarquables : $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$

Equations et inéquations : Soient k un réel, a(x) et b(x) des fonctions de x.

$\ln(a(x)) = k \Leftrightarrow a(x) = e^k$

$\ln(a(x)) = \ln(b(x)) \Leftrightarrow a(x) = b(x)$

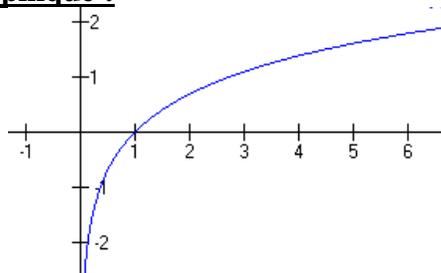
$\ln(a(x)) < k \Leftrightarrow a(x) < e^k$

Idem pour $\ln(a(x)) > (ou \geq ou < ou \leq) \ln(b(x))$

Relation logarithme népérien et exponentielle : $\ln e^x = x$ pour tout x

réel ; $e^{\ln x} = x$ pour x > 0

Représentation graphique :



Dérivée : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et pour une fonction u quelconque : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

Limites :

usuelles : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ à

utiliser lors d'une indétermination entre un logarithme et un polynôme (factoriser, changer de variable,...)

Primitive : Une primitive de $\frac{1}{x}$ est de la forme $\ln(x) + C$ avec C une constante réelle

Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est de la forme $\ln(u) + C$ avec C, k une constante réelle et u une fonction

Logarithme décimal : $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$

Tableau de variations :

x	0	+	+	+	+
ln x					
			→		

Démonstrations :

- Calcul de la dérivée
- Limite en 0 de xlnx
-

Algorithme Briggs: Calcul une valeur approchée du \ln d'un nombre x à 10^{-p} près

Langage naturel (Calculer le terme d'une suite)	Python
Saisir x et p n ← 0 Tant que $ x-1 > 10^{-p}$: x ← √x n ← n+1 Fin Tant que Renvoyer $(x-1) \times 2^n$	<pre>def briggs(x,p): n=0 while abs(x-1)>10^-p: x=sqrt(x) n=n+1 return((x-1)*2^n)</pre>

On utilise le fait que $v_n \times 2^n = \ln(u_0)$

Avec $v_n = \ln(u_n)$ et $u_{n+1} = \sqrt{n}$ avec (u_n) et (v_n) des suites convergentes

Approfondissements :

Fonction x^n

$$x^n = e^{n \ln x}$$

Limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Méthodes (exercices) :

	<u>Hachette</u>	<u>Hatier</u>	<u>Mes exos</u>	<u>Sesamaths</u>
A) utilisation des propriétés algébriques	8-10,13-14	42,45-48,67-69	1	49
B) Résolution d'équations/inéquations	1-4,18,37-40,51-55	43-44,49-50,65-66,85-86,88-90	2	50
C) (in)équation $a^x=k$	21	91-92	3	51
D) Limite composée d'un ln	25-31,41-43,56-57	53,106-108	4	52
E) indétermination avec polynômes				
F) Calcul de dérivée		109	5	53
G) Tableau de variations		51,87	6	54

Exercices de synthèse :

	<u>Hachette</u>	<u>Hatier</u>	<u>Mes exos</u>	<u>Sesamaths</u>
Algorithmes	67,96	116		
Synthèse maths	65,66,76,90-91	95,132	7	55-57
Synthèse opti			8	
Synthèse physique	63,73	76,124,133	9	59
Synthèse convexité		94	10	
Synthèse éco	69-70	52,127	13	

Synthèse suites	62,82,86,92	121	11	58
QCM	48,64	71,96	14	
Vrai/faux		70,79,100,110	12	
Prise d'initiative	94	99		
Approfondissement	88-89		15	