EXERCICES – LA FONCTION INVERSE

Exercice 1 (Calculs d'images/antécédents – Graphique/calcul)

Partie 1 :

Calculer les images des nombres suivants par la fonction carré : -2 ; $\sqrt{3}$; $\frac{1}{3}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{5}$

Partie 2 :

f est la fonction inverse. Calculer les images par f des réels suivants :

a) $\frac{5}{7}$ b) $-\frac{1}{9}$ c) $-\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{8}$ e) 10^{-6} f) 10^{5}

Partie 3 :

f est la fonction inverse. Déterminer les antécédents par f de :

a) $\frac{4}{3}$ b) $0,02$ c) 10^{-5} d) 2×10^{4}

Que fait-on comme fonction pour trouver ces antécédents ?

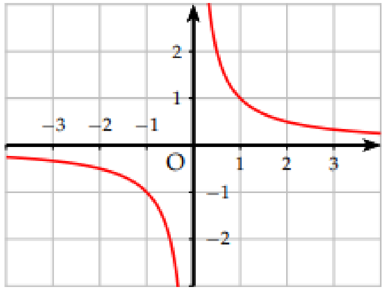
Partie 4 :

Voici la courbe représentative de la fonction inverse, dans un repère. Expliquer graphiquement

a) Pourquoi il n'existe qu'un seul réel dont l'inverse est 2. Quel est ce réel ?

b) Pourquoi il n'existe qu'un réel dont l'inverse est -3. Quel est ce réel ?

c) Pourquoi il n'existe pas de réel dont l'inverse est 0 ?



Partie 5 :

Afficher sur l'écran de votre calculatrice, la courbe de la fonction inverse sur l'intervalle I indiqué, en précisant la fenêtre utilisée.

a) $I = [-1; -0,1]$ b) $I = [10, 100]$

Exercice 2 (Résoudre une inéquation)

Partie 1 :

Résoudre les inéquations suivantes en s'aidant de la courbe de la fonction inverse

a) $\frac{1}{x} \leqslant \frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{x} \leqslant -3$ c) $\frac{1}{x} > -2$

Partie 2 :

Dans un repère orthonormé (O, I, J), construire la représentation graphique de la fonction inverse sur [-4 ; 4].

Résoudre graphiquement sur R les équations et inéquations suivantes puis les résoudre par le calcul.

1) $\frac{1}{x} = 4$ 2) $\frac{1}{x} = -2$ 3) $\frac{1}{x} = 0$ 4) $\frac{1}{x} = 7$ 5) $\frac{1}{x} = \frac{4}{5}$ 6) $\frac{1}{x} < 9$

7) $\frac{1}{x} > \frac{1}{3}$ 8) $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{4}$ 9) $\frac{1}{x} \geq 0$ 10) $\frac{1}{x} < -1$ 11) $-\frac{1}{2} < \frac{1}{x} \leq 4$

12) $-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq -2$

Exercice 3 (Comparer deux inverses)

Partie 1 :

Citer la propriété de la fonction inverse qui permet d'affirmer sans calcul que :

a) $3,14 \leqslant 3,151$ donc $\frac{1}{3,14} \geqslant \frac{1}{3,151}$

b) $-0,2 \leqslant -0,152$ donc $-\frac{1}{0,2} \geqslant -\frac{1}{0,152}$

Partie 2 :

Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans les calculer

1) $\frac{1}{1,01}$ et $\frac{1}{0,99}$ 2) $-\frac{1}{2,001}$ et $-\frac{1}{2,01}$ 3) $\frac{1}{\pi-1}$ et $\frac{1}{\pi-2}$

Partie 3 :

Comparer les nombres suivants sans les calculer.

1) $-\dfrac{1}{2,05}$ et $-\dfrac{1}{1,95}$ 2) $\dfrac{1}{5+\sqrt{2}}$ et $\dfrac{1}{5-\sqrt{2}}$

Quelles sont les inégalités vérifiées par $\dfrac{1}{x}$ quand :

1) $2 < x < 5$
2) $-7 < x < -1$
3) $0 < x < 3$
4) $x \in [-2;0[\cup]0;3[$

Donner un encadrement de x quand :

1) $1 < \dfrac{1}{x} < 3$
2) $-4 < \dfrac{1}{x} < -2$
3) $\dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{7}{6}$
4) $-2 < \dfrac{1}{x} < 0$

Exercice 4 (Encadrer un inverse)

Partie 1 :

Déterminer un encadrement de $\frac{1}{x}$ dans les cas suivants :

1) $3 < x < \frac{3}{7}$ 2) $-\frac{1}{2} < x < -1$ 3) $-3 \leq x < \frac{24}{5}$ 4) $-3 < x \leq 2$

5) $-\sqrt{3} < x \leq 1$ 6) $x \in [0;9]$

Partie 2 :

x est un nombre de l'intervalle $[5;10]$

Procéder comme l'exercice précédent pour donner un encadrement des nombres :

$M = \dfrac{5}{x-3}$ et $N = 2 - \dfrac{7}{x}$

Exercice 5 (Synthèse)

Partie 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{3x-5}{-x+2}$.

1) Conjecturer les variations de la fonction f sur $]-\infty;2[$ puis sur $]2;+\infty[$.
2) a) Vérifier que, pour $x \neq 2$, $f(x) = -3 + \dfrac{1}{-x+2}$.
   b) Justifier que la fonction affine $x \mapsto -x+2$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   c) Démontrer que f est croissante sur $]2;+\infty[$.
3) Démontrer que f est croissante sur $]-\infty;2[$.

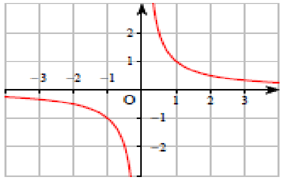
Partie 2 :

Fonction inverse

1) f est la fonction inverse. Calculer les images par f des réels suivants :

a) $\frac{5}{7}$ b) $-\frac{1}{9}$ c) $-\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{8}$ e) 10^{-6} f) 10^{5}

2) Voici la courbe représentative de la fonction inverse, dans un repère. Expliquer graphiquement
   a) Pourquoi il n'existe qu'un seul réel dont l'inverse est 2. Quel est ce réel ?
   b) Pourquoi il n'existe qu'un réel dont l'inverse est -3. Quel est ce réel ?
   c) Pourquoi il n'existe pas de réel dont l'inverse est 0 ?



3) f est la fonction inverse. Déterminer les antécédents par f de :

a) $\frac{4}{3}$ b) $0,02$ c) 10^{-5} d) 2×10^{4}

Que fait-on comme fonction pour trouver ces antécédents ?

4) Afficher sur l'écran de votre calculatrice, la courbe de la fonction inverse sur l'intervalle I indiqué, en précisant la fenêtre utilisée.

a) $I = [-1;-0,1]$ b) $I = [10,100]$

5) Citer la propriété de la fonction inverse qui permet d'affirmer sans calcul que :

a) $3,14 \leqslant 3,151$ donc $\dfrac{1}{3,14} \geqslant \dfrac{1}{3,151}$

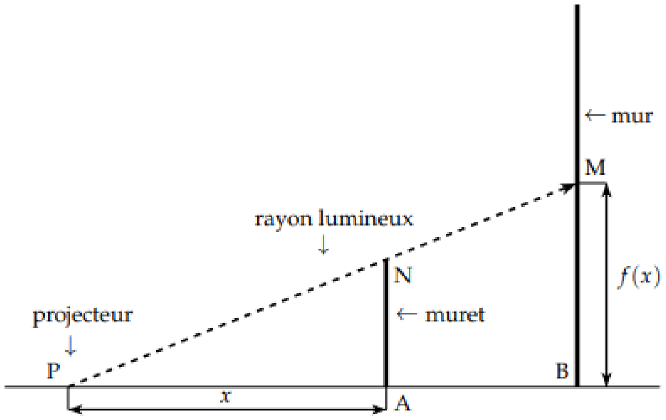
b) $-0,2 \leqslant -0,152$ donc $-\dfrac{1}{0,2} \geqslant -\dfrac{1}{0,152}$

6) Résoudre les inéquations suivantes en s'aidant de la courbe de la fonction inverse

a) $\frac{1}{x} \leqslant \frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{x} \leqslant -3$ c) $\frac{1}{x} > -2$

Exercice 6 (Problème géométrie)

Un petit muret AN de 2 mètres de hauteur est situé à 3 mètres d'un mur BM. Au sol un projecteur mobile est dirigé sur ce muret et le mur derrière ; l'ombre du muret arrive en M sur le mur.



1) Montrer, en utilisant le théorème de Thalès, que $\text{BM} = 2 + \dfrac{6}{\text{AP}}$

2) Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 2 + \dfrac{6}{x}$.

   a) Déterminer les variations de f sur $]0;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation.

   b) Recopier puis compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0,5	1	2	3	6	15
$f(x)$						

   c) Représenter la fonction f pour les valeurs de x situées dans l'intervalle $]0;15]$. On prendra comme unité le cm sur les deux axes.

3) On cherche où situer le projecteur afin qu'une marque située à 3,5 m de hauteur sur le mur ne soit jamais éclairée. Quelles sont les valeurs de x possibles ?

Exercice 7 (Problème concret)

À l'intérieur d'un piston, la pression P en bars, et le volume V en litres, suivent la loi $P \times V = 1$.

a) Expliquer pourquoi cette loi est liée à la fonction inverse.

b) Sachant qu'à l'intérieur du piston, le volume peut varier entre 0,5 et 5 litres, quelles sont les valeurs possibles pour la pression ?