<u>METHODES A CONNAITRE – DROITES</u>

Problème A : Déterminer l'équation cartésienne d'une droite (d).

<u>Questions-types :</u> Déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB).

<u>Procédure :</u>

1) L'équation cartésienne de (d) est de la forme $ax + by + c = 0$ avec a, b et c des réels à déterminer.
2) Trouver un vecteur directeur de la droite (d) :
- On pourra utiliser deux points A et B de la droite (d) et dans ce cas $\overrightarrow{AB}(s;t)$ est un vecteur directeur de (d)
- On pourra utiliser un vecteur directeur donné dans l'énoncé.
- On pourra utiliser un vecteur directeur d'une droite parallèle à (d).
- On pourra utiliser la pente de la droite dans ce cas $\vec{u}$ (1 ; m) est un vecteur directeur

3) On identifie alors les valeurs de a et de b sachant qu'un vecteur directeur de (d) a pour coordonnées :$\vec{u}(-b;a)$
Donc b = -s et a = t
4) Trouver un point M($x_M;y_M$) appartenant à la droite (d). On identifie alors c en injectant les coordonnées de M dans l'équation de (d) soit : $ax_M + by_M + c = 0$ donc $c = -ax_M - by_M$
5) On conclut.

<u>Exemples :</u>

Déterminer l'équation cartésienne de (AB) avec A(2 ; 5) et B(4 ; 3)

<u>A vous de jouer :</u> Soient les points A(2 ;-1) ; B(2 ;8) et C(-3 ;1). Déterminer les équations cartésiennes des droites suivantes a) (AB) b) La droite (d) passant par C et parallèle à (AB)

Problème B : Déterminer un vecteur directeur/pente à partir d'une équation de (d)

<u>Questions-types :</u> Déterminer un vecteur directeur de (d)

<u>Procédure :</u>

<u>Pour une équation cartésienne :</u>

L'équation cartésienne de (d) est de la forme : $ax + by + c = 0$
- Les coordonnées d'un vecteur directeur sont $\vec{u}$(-b ; a)
- La pente est $m = -\frac{a}{b}$

<u>Pour une équation réduite :</u>

L'équation réduite de (d) est de la forme : $y = mx + p$
- Les coordonnées d'un vecteur directeur sont $\vec{u}$(1 ; m)
- La pente est m

L'équation réduite de (d) est de la forme : $x = k$
- Les coordonnées d'un vecteur directeur sont $\vec{u}$(0 ; k)
- La pente est 0

<u>Exemples :</u> Déterminer un vecteur directeur de (d) : $2x + y + 1 = 0$ et (d') : $y = 3x - 4$

<u>A vous de jouer :</u> Déterminer un vecteur directeur de (d) : $3x + 2y - 2 = 0$ et (d') : $x = 1$

Problème C : Déterminer l'équation réduite d'une droite à partir de son équation cartésienne.

<u>Questions-types :</u> - Déterminer l'équation réduite de la droite (d)

<u>Procédure :</u>

L'équation cartésienne de (d) est de la forme : $ax + by + c = 0$

1) Si b= 0 alors l'équation réduite de (d) est $x = \frac{-c}{a}$ on isole x

Si b ≠ 0 alors l'équation réduite de (d) est $y = \frac{-a}{b}x + \frac{-c}{b}$. Le coefficient directeur de (d) est $m = \frac{-a}{b}$ On isole y

<u>Exemples :</u> Déterminer l'équation réduite de (d) : $2x - 3y + 1 = 0$

A vous de jouer :
1) Déterminer l'équation réduite de (d) : $3x - 4 = 0$
2) Déterminer l'équation réduite de (d) : $x + 3y + 5 = 0$

Problème D : Déterminer si un point appartient à une droite (d)

Questions-types : - Le point A(2 ;3) appartient-il à (d) ?

Procédure :
Le point A appartient-il à la droite ?
L'équation cartésienne de (d) est de la forme : $ax + by + c = 0$
1) Injecter les coordonnées de A dans l'équation cartésienne de (d) :
Si $ax_A + by_A + c = 0$ alors A appartient à (d) sinon ce n'est pas le cas.
Les points A, B et C sont-ils alignés ?

- 1ère méthode : par un calcul de colinéarité (voir les vecteurs)
- 2ème méthode : Déterminer une équation de la droite (AB) et vérifier que C appartient à (AB)

Exemples : Le point B(2 ; -2) appartient-il à la droite (d) : $2x + y + 1 = 0$
Les points A(2 ; -2), B(1 ; -5) et C(0 ; 3) sont-ils alignés ?

A vous de jouer : Le point C(-3 ;4) appartient-il à (d) : $-6x + 3y + 2 = 0$
Les points A(-1 ; -4), B(5 ; 4) et C(9 ; -6) sont-ils alignés ?

Problème E : Tracer la représentation graphique d'une droite.

Questions-types : Tracer la représentation graphique de la droite (d)

Procédure :
L'équation cartésienne de (d) est de la forme : $ax + by + c = 0$ ou l'équation réduite est $y = mx + p$ ou x = k
Méthode 1 : Placer deux points
1) On calcule les coordonnées de deux points de la droite en fixant deux valeurs aléatoires pour x et en déduit le « y » correspondant.
2) On place les points dans un repère, on les relie et on obtient alors la droite.
Méthode 2 : avec un point et la pente
1) On place un point A sur le graphe (l'ordonnée à l'origine (0 ;p) si possible)
2) On calcule la pente de la droite.
Si m = 0, la droite est verticale, on trace donc une droite verticale passant par A
On se décale alors de une unité vers la droite à partir de A puis on monte (si m > 0) de m ou on descend (si m < 0) de m. On obtient un deuxième point de la droite. On les relie.

Exemples : Tracer la représentation graphique de (d) : $-x + 4y + 3 = 0$

A vous de jouer : Tracer la représentation graphique de (d) : $-3x + 5y + 1 = 0$

Problème F : Lire l'équation d'une droite sur un graphique

<u>Questions-types :</u> Tracer la représentation graphique de la droite (d)

<u>Procédure :</u>

Trouver l'équation réduite/cartésienne d'une droite « oblique » ou « horizontale »

<u>Méthode 1 :</u>

1) Choisir deux points de la droite représentative de la fonction et déterminer les coordonnées de ces points. On note ces points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$

2) Déterminer le coefficient directeur à l'aide de la formule suivante : $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

3) Déterminer l'ordonnée à l'origine en résolvant l'équation $y_A = m \times x_A + p$ (ou l'équation $y_B = m \times x_B + p$). L'inconnue de cette équation est p (ou lire p sur le graphique).

4) L'équation réduite de la droite est alors : $y = mx + p$ (si la droite est horizontale m = 0 et donc $y = p$)
L'équation cartésienne est $y - mx - p = 0$ et un vecteur directeur est $\vec{u}(1\,;\,\mathrm{m})$

<u>Méthode 2 :</u>

1) Prendre un point de la droite dont les coordonnées sont facilement lisibles.

2) En partant de ce point, se décaler horizontalement de Δx unités vers la droite. Se décaler ensuite de Δy unités verticalement (vers le haut ou le bas) de façon à intercepter la droite. Il faut choisir un décalage permettant de tomber sur un point dont les coordonnées sont facilement lisibles.

3) Si le décalage verticale Δy a été fait vers le bas, mettre un signe – devant Δy

4) On obtient alors le coefficient directeur : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

5) Lire l'ordonnée du point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées. On obtient alors p.

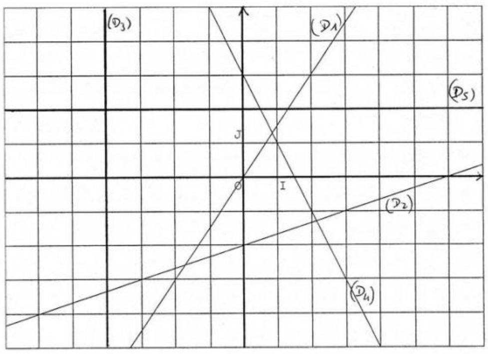
6) L'équation réduite de la droite est alors : $y = mx + p$ (si la droite est horizontale m = 0 et donc $y = p$)
L'équation cartésienne est $y - mx - p = 0$ et un vecteur directeur est $\vec{u}(1\,;\,\mathrm{m})$

Trouver l'équation réduite/cartésienne d'une droite « verticale »

1) Lire graphiquement l'abscisse d'un point de la courbe. On obtient alors k.

2) L'équation réduite de la droite est alors : $x = k$ et l'équation cartésienne est $x - k = 0$ et un vecteur directeur est $\vec{u}(0\,;\,1)$

<u>Exemples :</u> Lire l'équation des droites (D1) et (D2) et (D5):



<u>A vous de jouer :</u> Lire l'équation des droites (D3) et (D4).

Problème G : Résoudre un système de deux équations linéaires

<u>Questions-types :</u> Résoudre le système.

<u>Procédure :</u> Soit (d) $ax + by + c = 0$ et (d') $a'x + b'y + c' = 0$

1) Extraire un vecteur directeur de (d) (noté $\vec{u}$) et un vecteur directeur de (d') (noté $\vec{v}$)

2) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors (d) et (d') sont parallèles (on s'arrête alors à cette étape)

3) On résout le système : $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$.

- Si le système a une infinité de solutions, (d) et (d') sont confondues.

-Sinon les solutions (x ;y) sont les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d'). Les droites sont donc sécantes.

<u>Exemples :</u> Etudier la position relative de (d) : $2x + y + 1 = 0$ et de (d') : $3x + 2y - 4 = 0$

A vous de jouer : Etudier la position relative de :

Problème G : Résoudre un système de deux équations linéaires

Questions-types : Résoudre le système.

Procédure :

Méthode 1 : Par combinaison

1) On multiplie les lignes du système par un nombre de façon à obtenir le même coefficient devant une des deux variables dans chacune des deux équations.
2) On soustrait alors la ligne 1 à la ligne 2 :
3) On alors plusieurs possibilités :
- On obtient alors une équation du premier degré avec la variable restante que l'on résout (le système a une solution)
- On obtient une équation tout le temps vraie (du type 4 = 4) car les deux inconnues ont été supprimées par l'opération. On a alors une infinité de solutions.
- On obtient une équation tout le temps fausse (du type 3 = 2). Dans ce cas, le système n'a pas de solutions.
4) On remplace la variable y (ou x selon le choix de l'étape 1) par la valeur trouvée précédemment dans l'une des équations de départ du système :
5) On résout l'équation posée précédemment pour trouver la valeur prise par la dernière inconnue.
6) On vérifie que les solutions trouvées précédemment sont correctes en les injectant dans le système de
7) On conclut : S = (x ; y)

Méthode 2 : Par substitution

1) On isole une des deux variables dans l'une des deux équations. (Prendre l'équation et la variable qui pourra s'isoler le plus facilement : coefficient égale à 1 devant la variable, une seule variable dans une des deux équations,…)
2) Dans l'autre équation, on remplace l'inconnue choisie précédemment par l'expression trouvée précédemment. On simplifie l'expression.
Attention, si il n'y a plus d'inconnue, le système admet soit une infinité de solutions soit aucune.
3) On résout l'équation possédant une seule variable :
4) On remplace l'inconnue trouvée précédemment dans l'équation restante :
5) On vérifie la cohérence des résultats
6) On conclut : S = (x ; y)

Exemples : Résoudre $\begin{cases} 2x+3y+1=0 \\ 5x+2y-3=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} 3x+y+1=0 \\ 6x+2y+2=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2x-4y+1=0 \\ -x+2y+4=0 \end{cases}$

A vous de jouer : Résoudre $\begin{cases} 3x+y-1=0 \\ 5x+2y-3=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} 4x-5y+1=0 \\ 2x-3y-4=0 \end{cases}$

Problème H : Etudier la position relative de deux droites à partir de leur équation cartésienne.
Questions-types : *Prouver que (d) et (d') sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.*
Procédure : Soit (d) $ax+by+c=0$ et (d') $a'x+b'y+c'=0$ 1) Extraire un vecteur directeur de (d) (noté $\vec{u}$) et un vecteur directeur de (d') (noté $\vec{v}$) 2) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors (d) et (d') sont parallèles ou confondues (on s'arrête alors à cette étape) 3) On résout le système : $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$. -Sinon les solutions (x ;y) sont les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d'). Les droites sont donc sécantes.
Exemples : Etudier la position relative de (d) : $2x+y+1=0$ et de (d') : $3x+2y-4=0$
A vous de jouer : Etudier la position relative de : (d) : $2x+y+1=0$ et de (d') : $-x-0.5y-4=0$