LIMITES DE FONCTIONS - COURS

Définitions :

Contrairement aux suites, on peut étudier des limites lorsque x tend vers +∞ ; -∞ ou bien vers un nombre quelconque a.

On note : $\lim\limits_{x\to+/-\infty} f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ est la limite à droite en a, c'est-à-dire la limite lorsque x tend vers a tout en étant plus grand que a.

$\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ est la limite à gauche en a, c'est-à-dire la limite lorsque x tend vers a tout en étant plus petit que a.

Limites des fonctions de référence :

Fonction	définition	Limite en +∞	Limite en -∞
x^n (n entier)	ℝ	+∞	+∞ si n pair -∞ si n impair
√x	ℝ+	+∞	-
e^x	ℝ	+∞	0
1/x	ℝ*	0	0

Opérations sur les limites :

Dans ces tableaux, L et L' représentent des réels. ∞ représente +∞ ou -∞.

Produit de limites :

Limf	L	L ≠ 0	0	∞
Lim g	L'	∞	∞	∞
Lim f × g	L × L'	∞	INDETERMINEE	∞

Somme de limites :

Lim f	L	+∞	L	+∞	-∞
Lim g	L'	-∞	+/-∞	+∞	-∞
Lim f+ g	L + L'	INDETERMINEE	+/-∞	+∞	-∞

Quotient de limites :

Lim f	L	L≠ 0	0	∞	L	∞
Lim g	L'≠ 0	0	0	L'	∞	∞
Lim f/g	L / L'	∞	INDETERMINEE	∞	0	INDETERMINEE

Limites de composées

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ et si $\lim\limits_{x\to l} g(x)=l'$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=l'$

Théorèmes de comparaison :

Limites et comparaison

Si f et g vérifient pour tout x Є]a ; +∞[; f(x) ≤ g(x) et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

Si f et g vérifient pour tout x Є]a ; +∞[; f(x) ≤ g(x) et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Théorème dit des « gendarmes » :

Si trois fonctions f, g et h vérifient au voisinage de a, f(x) ≤ g(x) ≤ h(x) et si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$

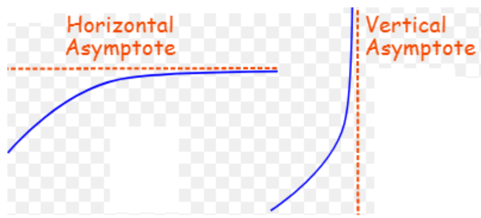
Croissances comparées :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$

Asymptotes :

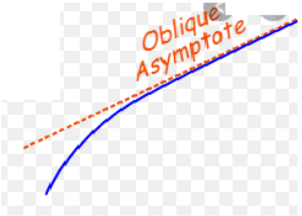
Si $\lim\limits_{x\to+/-\infty} f(x)=a$ alors la droite d'équation y = a est **asymptote horizontale** en +/- ∞ à f.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+/-\infty$ alors la droite d'équation x = a est **asymptote verticale** en a à f.



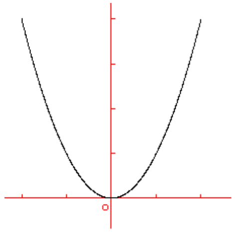
Approfondissements :

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)-(ax+b)=0$ alors la droite d'équation y = ax+b est **asymptote oblique** en a à f.



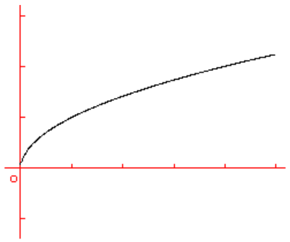
Branches infinies : limite de f(x)-ax non définie et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$

Si a = +/-∞ => Branche parabolique de direction (Oy)



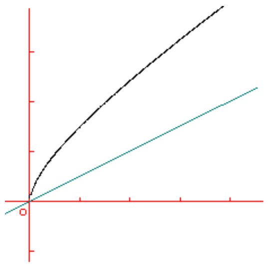
branche parabolique de direction (Oy)

Si a = 0 => Branche parabolique de direction (Ox)



Branche parabolique de direction (Ox)

Si a ≠ 0 => Branche parabolique de direction y = ax



Branche parabolique d'équation y=x/2

Démonstrations : croissance comparée de x^n et e^x

Méthodes (exercices) :

	Hachette	**Hatier**	**Mes exos**	**Sesamaths**
Révisions	10-17,50-51	47-51	1,2	24
A) Limites en un point	18-19	44-46,83-88,118-121	3	25
B) Limites par composition	20,31-42,53		4	26
C) Asymptote ?	1-9	41,42,70, 128, 130	5	27
D) 0/0	64	122,127	6	
E) exponentielles	55	67,114-117	7	28
F) Croissances comparées	47-48		8	29

Exercices de synthèse :

	Hachette	**Hatier**	**Mes exos**	**Sesamaths**
Algorithmes		73	-	
Synthèse math	70,78, 86,98-99	168,170,176	9	30
éco		162,177		
physique	90, 94	160,161,178		
QCM	95	175	10	
Vrai/faux	96	100,153	11	
Prise d'initiative			-	
Approfondissement		163-166	-	31