METHODES A CONNAITRE – LOI BINOMIALE

Problème A : Justifier que X suit une loi binomiale
<u>*Questions-types :*</u> *- Justifier que X suite une loi binomiale dont on précisera les paramètres.*
<u>Procédure :</u> On écrit les phrases suivantes, en remplaçant **les mots en gras** en fonction de l'énoncé. L'expérience aléatoire est un schéma de Bernoulli. En effet, on répète **n** fois de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli. L'épreuve de Bernoulli est a pour succès : **«évènement succès »** et pour échec : **«évènement échec »**. La probabilité du succès est **p**. X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès suit donc une loi binomiale de paramètres **p** et **n**.
<u>Exemples :</u> On tire au hasard une boule dans une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules noires. On note la couleur de la boule et on la remet dans l'urne. On répète 5 fois l'expérience. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires tirées. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
<u>A vous de jouer :</u> En France, il y a 12 % de cadres. Dans le cadre d'un sondage, on interroge au hasard 10 personnes à propos de la catégorie professionnelle à laquelle elles appartiennent. On considère que la taille de la population française est suffisamment grande pour supposer que les tirages sont indépendants. Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de cadres. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Problème B : Modéliser un schéma de Bernoulli avec un arbre pondérée.
<u>*Questions-types :*</u> *- Modéliser la situation à l'aide d'un arbre*
<u>Procédure :</u> On suppose que X suite une loi B(n ;p) On réalise un arbre avec n niveaux. Chaque nœud de l'arbre est relié à deux branches, le succès et l'échec. Pour chaque branche « succès » on note la probabilité p au-dessus (resp. 1-p pour les branches échecs).
<u>Exemples :</u> On lance un dé cubique équilibré 3 fois de suites. On note S l'évènement : « obtenir un 6 ». Modéliser la situation à l'aide d'un arbre.
<u>A vous de jouer :</u> Une chaine de production fabrique des boulons. 3% des boulons sont non conformes. On prélève 4 boulons de la chaîne de fabrication. Modéliser la situation par un arbre.

Problème C : Calculer la probabilité d'obtenir exactement k succès.

Questions-types : *- Calculer la probabilité d'obtenir exactement 3 succès.*

Procédure :

A la main :

La probabilité d'avoir exactement k succès : $\boldsymbol{p(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}}$

Pour déterminer $\binom{n}{k}$ voir problème C.

A la calculatrice :

CASIO : Menu « stat » ; « DIST » ; « BINM » ; « Bpd » ; Data : var/x : la valeur de k/Numtrial : n et p : la valeur de p.

TI : DISTRIB ; binomFdp(n,p,k)

Exemples : En reprenant l'exemple du problème A calculer la probabilité de tirer exactement 2 boules noires.

A vous de jouer : Reprendre énoncé du pb A : Quelle est la probabilité que 8 personnes soient des cadres ?

Problème D : Calculer une probabilité avec une inégalité

Questions-types : *- Déterminer la loi de probabilité de X*

Procédure :

1) Traduire l'énoncé avec une des probabilités suivantes :

Au moins k succès ↔ $p(X \geq k)$

Au plus k succès ↔ $p(X \leq k)$

Moins de k succès ↔ $p(X < k) = p(X \leq k-1)$

Plus de k succès ↔ $p(X > k) = p(X \geq k+1)$

2) Calculer la probabilité « à la main » ou à la calculatrice.

- La probabilité d'avoir au plus k succès :

A la main : On décompose $p(X \leq k) = p(X=k) + p(X=k-1) + \cdots p(X=0)$

On calcule chacune des probas $p(X=k)$ avec la méthode D.

On peut utiliser l'évènement contraire pour aller plus vite :

$p(X \leq k) = 1 - p(X > k) = 1 - (p(X=k+1) + p(X=k+2) + \cdots + p(X=n))$

A la calculatrice :

CASIO : Menu « stat » ; « DIST » ; « BINM » ; « Bcd » ; Data : var/x : la valeur de k/Numtrial : n et p : la valeur de p.

TI : DISTRIB ; binomFRép(n,p,k)

- La probabilité d'avoir au moins k succès :

A la main : On décompose $p(X \geq k) = p(X=k) + p(X=k+1) + \cdots p(X=n)$

On calcule chacune des probas $p(X=k)$ avec la méthode D.

On peut utiliser l'évènement contraire pour aller plus vite :

$p(X \geq k) = 1 - p(X < k) = 1 - p(X \leq k-1) = 1 - (p(X=k-1) + p(X=k-2) + \cdots + p(X=0)$

A la calculatrice : On pose $p(X \geq k) = 1 - p(X \leq k-1)$

On calcule $p(X \leq k-1)$ de la même manière que pour une probabilité « au plus » (en tapant k-1 au lieu de k).

- La probabilité d'avoir plus de k succès :

A la main : On décompose $p(X > k) = p(X=k+1) + p(X=k+2) + \cdots p(X=n)$

On calcule chacune des probas $p(X=k)$ avec la méthode D.

On peut utiliser l'évènement contraire pour aller plus vite :

$p(X > k) = 1 - p(X \leq k) = 1 - (p(X=k) + p(X=k-1) + \cdots + p(X=0)$

A la calculatrice : On pose $p(X > k) = 1 - p(X \leq k)$

On calcule $p(X \leq k)$ de la même manière que pour une probabilité « au plus »

- La probabilité d'avoir moins de k succès :

A la main : On décompose $p(X < k) = p(X = k - 1) + p(X = k - 2) + \cdots p(X = 0)$

On calcule chacune des probas $p(X = k)$ avec la méthode D.

On peut utiliser l'évènement contraire pour aller plus vite :

$p(X < k) = 1 - p(X \geq k) = 1 - (p(X = k) + p(X = k + 1) + \cdots + p(X = 0))$

A la calculatrice : On pose $p(X < k) = p(X \leq k - 1)$

On calcule $p(X \leq k - 1)$ de la même manière que pour une probabilité « au plus » (en tapant k-1 au lieu de k).

- La probabilité d'avoir entre k et k' succès :

A la main : On décompose $p(k \leq X \leq k') = p(X = k) + p(X = k + 1) + \cdots p(X = k')$

On calcule chacune des probas $p(X = k)$ avec la méthode D.

A la calculatrice : On pose $p(k \leq X \leq k') = p(X \leq k') - p(X < k)$

Exemples :

Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés.

On considère un entier positif ou nul n et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de filles interrogées au cours de n jours consécutifs.

Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs, soient interrogées au moins 4 filles ?

A vous de jouer :

Un constructeur de composants produit des résistances. La probabilité qu'une résistance soit défectueuse est égale à 5×10^{-3}.

Dans un lot de 1000 résistances, quelle est la probabilité d'avoir

a. Exactement deux résistances défectueuses ?
b. Au plus deux résistances défectueuses ?
c. Au moins deux résistances défectueuses ?

Problème E : Calculer et interpréter l'espérance/variance d'une loi binomiale

Questions-types : *- Calculer E(X) et interpréter le résultat.*

- Quel montant le joueur peut-il espérer gagner ?Le jeu est-il équitable ?

Procédure :

1) On calcule l'espérance en utilisant la formule du cours (idem pour la variance)

2) Pour interpréter le résultat, il suffit de comprendre que E(X) est le gain moyen que l'on peut espérer obtenir en jouant un très grand nombre de fois.

Si E(X) > 0 le jeu est favorable au joueur.

Si E(X) < 0 le jeu est défavorable au joueur.

Si E(X) = 0 le jeu est équitable.

Exemples : En reprenant le problème A, calculer E(X) et V(X).

A vous de jouer : En reprenant le problème A, calculer E(Y) et V(Y).

Problème F : Chercher un intervalle I vérifiant une condition de probabilité

<u>Questions-types :</u> - Trouver un intervalle [a , b] avec la plus petite amplitude possible tel que $p(a \leq X \leq b) \geq 0.95$

<u>Procédure :</u>

1) A l'aide de la calculatrice on calcule des tableaux de la forme

k	p(X=k)	p(X ≤ k)
0		
1		
….		
n		

2) On lit la réponse dans le tableau

<u>Exemples :</u> Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{B}(20,0.6)$

1) Déterminer les réels a et b tels que $p(a \leq X \leq b) \geq 0,95$
2) Déterminer le réel k tel que $p(X \geq k) \geq 0,95$

<u>A vous de jouer :</u> Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{B}(15,0.3)$

1) Déterminer les réels a et b tels que $p(a \leq X \leq b) \geq 0,95$
2) Déterminer le réel k tel que $p(X \geq k) \geq 0,95$