METHODES A CONNAITRE – CONTINUITE

Continuité :

Problème A : Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Questions-types : *- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle [2 ; 4]*

Procédure : Démontrer que $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle [a ; b].

1) Dresser le tableau de variations de f. En déduire le sens de variations de f sur [a ; b]
2) On calcule f(a) et f(b) (ou les limites si a et b sont +/-∞)
3) On rédige de cette façon :

La fonction **f** est dérivable donc continue et strictement **croissante (resp. décroissante)** sur **[a ; b].**
De plus, **f([a ; b]) = [f(a) ; f(b)] (ou [f(b) ; f(a)] si f décroissante)** et $\boldsymbol{k} \in [\boldsymbol{f(a)}; \boldsymbol{f(b)}]$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\boldsymbol{f(x) = k}$ admet une unique solution noté **α** dans **[a ; b].**

Démontrer que $f(x) = k$ n'admet pas de solution sur l'intervalle [a ; b].

1) Il suffit de démontrer que $\boldsymbol{k} \notin [\boldsymbol{f(a)}; \boldsymbol{f(b)}]$ en utilisant le tableau de variations.

Exemples : Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ avec $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ admet une unique solution α sur R.

A vous de jouer : Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ avec $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$ admet une unique solution sur R.

Problème B : Encadrer la solution d'une équation à l'aide de la calculatrice à 10^{-n} près

Questions-types : *- Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près*

Procédure : Chercher une valeur approchée de α solution de $f(x) = k$ avec $\alpha \epsilon [a; b]$

1) On utilise le menu table de la calculatrice. On saisit la formule de la fonction.
2) On règle le pas pour aller de 1 en 1. On règle les bornes de la table sur $[a; b]$
3) On cherche les valeurs de x, notées c et d, telles que $f(c) < k$ et x+1 $f(d = c + 1) > k$ (ou le contraire si la fonction est décroissante).
4) On recommence l'étape 2 en changeant les bornes de la table par $[c; d]$ et on règle le pas de 0,1 en 0,1…
5) On continue le processus jusqu'à obtenir les valeurs e et g de x telles que $f(e) < k$ et x+1 $f(g = e + 10^{-n}) > k$ (ou le contraire si la fonction est décroissante).
6) L'encadrement de α à 10^{-n} près est donc [e ;g]. Si on cherche une valeur approchée on choisit le nombre e ou g qui a l'image la plus proche de k.

Exemples :En reprenant l'équation du problème E, encadrer α à 10^{-3} près.

A vous de jouer : En reprenant l'équation du problème E, encadrer α à 10^{-3} près.

Problème C : Etudier la continuité d'une fonction.

Questions-types : *- La fonction f est-elle continue en 0 ?*

Procédure :

1) On calcule la limite à gauche et la limite à droite en a de la fonction f. Si les deux limites sont égales à f(a) alors f est continue en a.

Exemples : Etudier la continuité de la fonction f(x) = (x²-1)/(x-1) pour x ≠ 0 et f(0) =1 en a = 1

A vous de jouer : La fonction f(x) = 1/x pour $x \neq 0$ et f(0)= 0 est-elle continue en 0 ?

Problème C : Dresser un tableau de signes à partir d'un tableau de variations.

Questions-types : - Dresser le tableau de variations de f. En déduire le signe de f.

Procédure :

1) Dresser le tableau de variations de f, résoudre l'équation (ou prouver qu'il existe des solutions) $f(x) = 0$

2) On place dans le tableau de variations de f, les valeurs de x pour lesquels $f(x) = 0$ et on reporte leur image (donc 0) sur la ligne des variations. A l'aide des variations, on en déduit le signe de f dans une troisième ligne.

Exemples : Dresser le tableau de variations sur R de $f(x)$ avec $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ et en déduire le signe de f.

A vous de jouer : En reprenant le problème E, déterminer le signe de f.