METHODES A CONNAITRE – DERIVATION ET CONVEXITE

Problème A : Calculer une dérivée par composition

Questions-types : - Calculer la dérivée de $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

Procédure :

1) Identifier les fonctions h et g qui permettent d'écrire f sous la forme $f(x) = g \circ h(x)$
2) Etudier le domaine de définition et dérivabilité de f
3) On pose X = h(x). Calculer la dérivée de h(x) et la dérivée de g(X)
4) La dérivée de f est de la forme $f(x) = h'(x) \times g'(X)$ puis on remplace X par h(x)

Exemples : Calculer la dérivée de $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

A vous de jouer : Calculer la dérivée de $f(x) = (x^2+3)^6$

Problème B: Calculer une dérivée seconde

Questions-types : - Calculer la dérivée seconde de f.

Procédure :

1) Calculer f'(x) puis dériver la dérivée. On obtient la dérivée seconde.

Exemples : Calculer la dérivée seconde de $f(x) = 2e^{x^2-3}$

A vous de jouer : Calculer la dérivée seconde

Problème C : Etudier la convexité (calculs ou graphique)

Questions-types : Etudier la convexité de f

Procédure :

Etude de la convexité par calcul

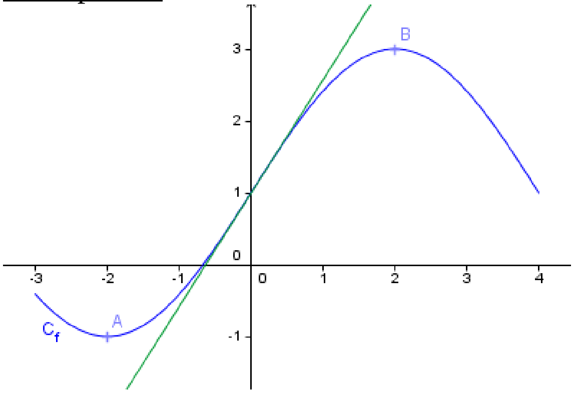
1) Calculer la dérivée seconde f'' de la fonction f.
2) Etudier le signe de f'', en déduire les variations de f' puis la convexité de f.
3) On présente les résultats avec un tableau :

x	a *b*
f''(x)	Signe de f''(x) (+, 0 et -)
f'(x)	Variations de f '(flèches)
f(x)	Convexité de f

Etude de la convexité par graphique :

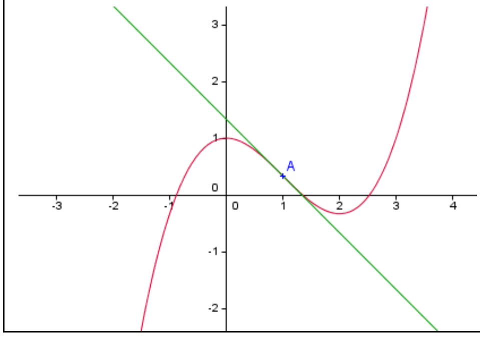
1) Si les tangentes sont sous la courbe alors f est convexe.
Si les tangentes sont au-dessus de la courbe alors f est concave.
Si la tangente traverse la courbe alors f admet un point d'inflexion.
2) Si on a la courbe de la dérivée :
Si la courbe monte alors f est convexe
Si la courbe descend alors f est concave
Si la courbe change de variations alors f a un point d'inflexion
3) Si on a la courbe de la dérivée seconde :
Si la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses alors f est convexe
Si la courbe est en-dessous de l'axe des abscisses alors f est concave
Si la courbe traverse l'axe des abscisses alors f a un point d'inflexion

Exemples : Etudier la convexité de la fonction : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$ sur R



A vous de jouer : Etudier la convexité de la fonction : $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ sur R

Etudier la convexité de la fonction représentée ci-dessous sur [-2 ; 4]



Problème D : Etablir une inégalité avec la convexité

Questions-types : *- Montrer que $(a+b)^3 \leq 4(a^3+b^3)$*

- Montrer que $4x-3 \leq x^4$

Procédure :

Pour montrer une inégalité avec deux paramètres :

1) Etudier la convexité de la fonction f
2) Appliquer la formule « encadrement et convexité »

Pour montrer une inégalité avec une fonction :

1) Etudier la convexité de f
2) Calculer l'équation de la tangente à la courbe dont le coefficient directeur est donné dans l'inégalité.

Exemples : Montrer que $(a+b)^3 \leq 4(a^3+b^3)$

Montrer que $4x-3 \leq x^4$

A vous de jouer : Montrer que $\sqrt{a+b} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

Montrer que $x+1 \leq e^x$

Problème E : Tracer l'allure d'une courbe

Questions-types : *- Tracer la représentation graphique de f*

Procédure :

1) Etudier les variations de f
2) Etudier les limites de f afin de déterminer d'éventuelles asymptotes
3) Tracer les éventuelles tangentes et etudier la convexité de la fonction
4) Placer quelques points et esquisser l'allure de la courbe en respectant : variations et convexité.

<u>Exemples :</u> $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ sur R. Esquisser l'allure de f.
<u>A vous de jouer :</u> Esquisser l'allure de la fonction $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ sur [-1 ; 1]