METHODES A CONNAITRE – LOGARITHME NEPERIEN

Problème A : Utiliser les propriétés algébriques du logarithme pour transformer une expression.

Questions-types :

- *Simplifier* $\ln(48) - 3ln2 + \ln(34)$

Procédure :

1) On cherche à décomposer les nombres à l'intérieur du ln comme produit ou puissance de nombres et on utilise les règles : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ et $\ln(a^n) = n \times \ln a$

Exemples : *Simplifier* $\ln(128) - 3ln2 + \ln(8)$

A vous de jouer : *Simplifier* $\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln(81) - \ln(144)$

Problème B : Résoudre une équation(ou inéquation) du type $\boldsymbol{ln(a(x)) = k}$ (resp. $\boldsymbol{n(a(x))} > k$) (ou $\boldsymbol{ln(a(x)) = ln(b(x))}$ (resp. $\boldsymbol{ln(a(x))} > \ln(b(x))$))

Questions-types : - *Résoudre* $e^{3x+2} = e^{2x+1}$

Procédure :

Equation du type $\ln(a(x)) = k$ ou inéquation du type $\ln(a(x)) > k$

1) On cherche le domaine de validité de l'équation ou de l'inéquation en résolvant la (ou les) inéquation(s) : $a(x) > 0$ avec a(x) toutes les expressions de x dans les « ln »

On transforme l'expression de façon à obtenir une expression de la forme $\ln(a(x)) = k$ (resp $> k$)

2) On applique la fonction exponentielle de chaque coté de l'égalité : $a(x) = e^k$

3) On résout l'équation résultante (premier degré ou second degré,…)

4) On vérifie que les solutions trouvées en 3) appartiennent au domaine de validité de l'équation.

On procède de la même manière pour les équations $ln(a(x)) = ln(b(x))$ (resp. $ln(a(x)) > \ln(b(x))$)

Exemples : Résoudre les équations : $\ln(3x+1) = 3$ et $\ln(2x-1) > 3\ln(4x+1)$

A vous de jouer : Résoudre les équations : $\ln(x^2 - 1) < 5$ et $\ln(2x+1) - 3\ln(x) = \ln(3x-4)$

Problème C : Résoudre une équation du type $\boldsymbol{a^x = k}$ (ou resp. $\boldsymbol{a^x > k}$)

Questions-types : - *Résoudre* $2^n > 1000$

Procédure :

1) On applique le logarithme de chaque coté de l'égalité (ou inégalité) : $ln\ a^x = ln\ k$ (ou resp. $ln\ a^x > ln\ k$)

2) On utilise la règle $\ln a^n = n \times \ln(a)$: $x \times \ln(a) = ln\ k$ (ou resp. $x \times \ln(a) > ln\ k$)

3) On isole x. Attention, pour une inéquation, ln(a) est négatif si a < 1 donc, dans ce cas, il faut changer le sens de l'inégalité : $x = \frac{ln\ k}{\ln a}$ (ou resp. $x > \frac{ln\ k}{\ln(a)}$)

Exemples : Résoudre $2^n > 1000$

A vous de jouer : *Résoudre* $3 \times (\frac{1}{2})^n + 2 \leq 2{,}001$

Problème D : Lever une indétermination d'une limite par la composée d'un logarithme
Questions-types : *Calculer* $\lim_{x\to+\infty} \ln(\frac{x+1}{x+2})$
Procédure : 1) On lève l'indétermination à l'intérieur du logarithme. 2) On calcule la limite de la fonction dans le logarithme. 3) On en déduit la limite par composition
Exemples : *Calculer* $\lim_{x\to+\infty} \ln(\frac{x+1}{x+2})$
A vous de jouer : *Calculer* $\lim_{x\to+\infty} \ln(\frac{e^x+1}{e^{3x}+1})$

Problème E : Lever une indétermination d'une limite avec des logarithmes et des polynomes.
Questions-types : - *Calculer* $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) - 2x$
Procédure : 1) L'objectif est de faire apparaître les limites de cours : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ou $\lim_{x\to 0} xln(x) = 0$ 2) Plusieurs méthode sont envisageables : - On peut essayer de factoriser par le terme de plus haut degré du polynôme. - On peut essayer de procéder à un changement de variable du type X = $\frac{1}{x}$ (ou autre) qui permet de transformer la limite en : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to 0} f(X)$.
Exemples : *Calculer* $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) - 2x$ *ou démontrer que* $\lim_{x\to 0} xln(x) = 0$
A vous de jouer : *Calculer* $\lim_{x\to+\infty} \text{xln}(x) - x$

Problème F : Calculer la dérivée d'une fonction/Justifier la dérivabilité

Questions-types : - *Calculer la dérivée de f sachant que* $f(x) = \ln(2x+1) - 3x + 1$

Procédure :

1) On procède de la même manière que pour une fonction classique.
On cherchera tout particulièrement à utiliser la relation : $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$
Pour utiliser cette formule, on identifie u, on en déduit u' et on applique la formule.
2) On cherche à la fin du calcul à mettre tout au même dénominateur et à factoriser si possible.

Exemples : Dériver $f(x) = \ln(x+1) - 3x + 1$et $f(x) = xln(x) - x$

A vous de jouer : Dériver $f(x) = \ln(x) + x + 1$et $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$

Problème G : Dresser le tableau de variations d'une fonction avec un logarithme.

Questions-types : - *Etudier les variations de* $f(x) = \ln(3x) - 2x + 1$

Procédure : On cherche les variations de f sur [a ; b]

1) On calcule la dérivée de f. On met tout au même dénominateur.
2) On étudie le signe de f'(x) :
- Si f' n'est constitué que de logarithmes et de réels, on résout l'inéquation $f'(x) \geq 0$. Les solutions de l'inéquation sont les cases du tableau avec des « + » (les autres cases auront un moins)
- Si f' est constitué de plusieurs facteurs, (du type $f'(x) = a(x) \times b(x)$) On étudie le signe de chaque facteur pour en déduire le signe de f'(x).
3) On dresse le tableau qui prend la forme suivante : (On ajoute dans la première ligne les valeurs pour lesquelles f'(x) s'annule et autant de lignes que nécessaire pour déduire le signe de f').

x	a $\qquad\qquad\qquad\qquad$ b
f'(x)	Signe de f'(x) (+, 0 et -)
f(x)	Variations de f (flèches)

4) On calcule f(a) et f(b) et on les ajoute au tableau (sauf en cas de valeurs interdites, ou les limites).

Exemples : Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

$f(x) = \ln(3x) - 2x + 1$ et $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$

A vous de jouer : Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.
$f(x) = \ln(\frac{x}{x^2+1})$ et $g(x) = x\ln(x) - 2x + 1$