METHODES A CONNAITRE – PRIMITIVES ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Problème A : Déterminer une primitive d'une fonction

Questions-types : - *Déterminer une primitive de* $f(x) = 2x(5x^2+1)^6$

Procédure :

Cas d'une somme de fonctions usuelles

1) Décomposer la fonction étudiée en somme de fonctions usuelles
2) Utiliser le tableau pour faire correspondre à chaque fonction usuelle sa primitive et les additionner.

Cas de fonctions composées

1) Utiliser le tableau des primitives pour repérer la fonction composée : repérer les racines, les quotients, les exponentielles,…bref ce qui caractérise chaque ligne du tableau.
2) Identifier la fonction u(x) présente et calculer la dérivée u'(x) correspondante.
3) Si la dérivée u'(x) n'est pas présente dans la fonction, la faire apparaitre en multipliant et divisant par un réel de façon à faire apparaître u'(x).
4) Utiliser le tableau pour en déduire une primitive de la fonction.

Exemples : *Déterminer une primitive de* $f(x) = 2x(5x^2+1)^6$ *et de* $g(x) = 3x^2 - 2x + 1 + 3\sqrt{x}$

A vous de jouer : *Déterminer une primitive de* $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+1}}$ *et de* $g(x) = (3x+1)e^{x^2+\frac{2}{3}x+2}$

Problème B : Déterminer la primitive F de f vérifiant F(k) = R

Questions-types : - *Déterminer la primitive de* $f(x) = 3x + 1$ *qui vérifie F(0)=2*

Procédure :

1) Idem que la partie A.
2) On détermine la valeur de la constante C en résolvant l'équation F(k) = R.

Exemples : *Déterminer la primitive de* $f(x) = 3x + 1$ *qui vérifie F(0)=2*

A vous de jouer : *Déterminer la primitive de* $f(x) = x^2 + 1$ *qui vérifie F(0)=-3*

Problème C : Prouver qu'une fonction F est une primitive de f

Questions-types : *Démontrer que* $F(x) = xln(x) - x$ *est une primitive de* $f(x) = \ln x$

Procédure :

1) Dériver F(x). Si F'(x) = f(x) alors F est une primitive de f.

Exemples : *Démontrer que* $F(x) = xln(x) - x$ *est une primitive de* $f(x) = \ln x$

A vous de jouer : *Démontrer que* $F(x) = \frac{\ln x}{x}$ *est une primitive de* $f(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

Problème D : Résoudre une équation différentielle de la forme y'=ay+b
<u>*Questions-types :*</u> *Résoudre l'équation y'-3y=4 vérifiant y(0)= 4*
<u>Procédure :</u> 1) Transformer l'équation pour la mettre sous la forme y' = ay + b 2) Les solutions sont de la forme $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ on identifie a et b à l'aide de l'équation 3) On détermine C en résolvant l'équation du premier degré $y(x_0) = y_0$ (si une condition est donnée)
<u>Exemples :</u> *Résoudre l'équation 2y'-4y = 7 avec y(0) = 4*
<u>A vous de jouer :</u> *Résoudre l'équation -y'+5y = 1 avec y(-1) = 2*

Problème E : Résoudre une équation différentielle de la forme y'=ay+f(x)
<u>*Questions-types :*</u> *- Résoudre l'équation y'-3y=2x vérifiant y(0)= 4*
<u>Procédure :</u> 1) Transformer l'équation pour la mettre sous la forme y' = ay + f(x) 2) Les solutions sont de la forme $y(x) = Ce^{ax} + yp(x)$ on identifie a et b à l'aide de l'équation <u>Comment trouver $y_p(x)$?</u> → Si $y_p(x)$ est donnée, on vérifie qu'elle est bien solution en calculant y'_p et en l'injectant dans l'équation → Si on donne la forme de $y_p(x)$ (2nd degré, 1er degré, etc…) on calcule y'_p et en l'injectant dans l'équation on identifie les paramètres. 3) On détermine C en résolvant l'équation du premier degré $y(x_0) = y_0$ (si une condition est donnée)
<u>Exemples :</u> *1)a) Résoudre l'équation y'-3y=0* *b) Montrer que g(x) = 4x+1 est solution de y'-3y=-12x+1* *c) En déduire la solution de l'équation y'-3y=-12x+1 vérifiant y(0)= 2* *2) Résoudre l'équation y'-3y=x² vérifiant y(0)= 4 sachant que la solution particulière est une fonction du second degré*
<u>A vous de jouer :</u> *Résoudre l'équation y'-3y=2x-4 sachant que yp est une fonction affine et vérifiant y(0)= 4*