METHODES A CONNAITRE – LIMITES DE FONCTIONS

Limites (voir suites)

Problème A : Limites en un point d'une fonction, limites à gauche/à droite.
Questions-types : - *Calculer* $\lim_{x\to 2} f(x)$
Procédure : Calculer $\lim_{x\to a} f(x)$ avec a un réel. 1) Il faut distinguer deux cas : $\lim_{x\to a^-} f(x)$ (limite à gauche c'est-à-dire avec $x < a$) et $\lim_{x\to a^+} f(x)$ (limite à droite c'est-à-dire avec $x > a$) 2) On identifie les fonctions de référence qui constituent la fonction f. - On étudie la limite de chacune de ces fonctions en remplaçant x par a (on fait le calcul de tête). - Si une des expressions tend vers 0, on précisera si on tend vers 0^+ ou 0^- en étudiant le signe de l'expression sur l'intervalle $x < a$ pour une limite à gauche (ou $x > a$ à droite). 3) On détermine la limite de f en utilisant les règles opératoires sur les limites (somme, produit, quotient, composée,…). Si on obtient une forme indéterminée, il faut modifier l'expression de f (en factorisant ou autre).
Exemples : Calculer la limite $\lim_{x\to 2} f(x)$ avec $f(x) = \frac{3x-2}{x-2}$ définie sur R/{2}
A vous de jouer : Calculer la limite $\lim_{x\to 3} f(x)$ avec $f(x) = \frac{4x+1}{x^2-9}$ définie sur R/{-3 ;3}

Problème B : Calculer une limite par composition.
Questions-types : - *Déterminer* $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{3x+2}$
Procédure : $\lim_{x\to a} f(u(x))$ avec a un réel ou ∞ et u(x) une fonction 1) Identifier le type de composition à savoir : $\sqrt{u}$; u^n ; $\cos u$; $\sin u$ 2) On calcule $\lim_{x\to a} u(x) = b$ 3) On calcule $\lim_{x\to b} f(x) = c$ et on en déduit : $\lim_{x\to a} f(u(x)) = c$
Exemples : Calculer $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 1}$
A vous de jouer : Calculer $\lim_{x\to -\infty} (3x-2)^4$

Problème C : Déterminer si une courbe admet une asymptote.
Questions-types : - *Interpréter les limites calculées précédemment.* *- La courbe C admet-elle des asymptotes ? Si oui préciser leur équation.*
Procédure : a est un réel 1) On calcule les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition. 2) Si on a une limite du type : $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ alors Cf admet une asymptote verticale d'équation x = a 3) Si on a une limite du type : $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = a$ alors Cf admet une asymptote horizontale d'équation y = a en +/- ∞

Exemples : La courbe Cf, représentative de f avec $f(x)=\frac{1}{2x-4}$ définie sur R/{2} admet-elle des asymptotes ?

A vous de jouer : La courbe Cf, représentative de f avec $f(x)=\frac{3x+3}{x-4}$ définie sur R/{4} admet-elle des asymptotes ?

Problème D : Lever une indétermination du type $\frac{0}{0}$

Questions-types : *Calculer* $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}$

Procédure : Deux méthodes possibles :
Factorisation :
1) On essaie de factoriser le numérateur (ou le dénominateur ou les deux) de façon à faire apparaitre une expression identique au numérateur ou au dénominateur.
2) On simplifie le quotient par l'expression trouvée et on calcule la limite normalement.
Utiliser la définition de la dérivabilité en un point a :
1) On utilise : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ si la fonction est dérivable en a.

Exemples : *Calculer* $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}$

A vous de jouer : *Calculer* $\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2+x-2}{x+2}$

Problème E : Lever une indétermination d'une limite avec des exponentielles uniquement

Questions-types : *Calculer* $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}$ *ou* $\lim_{x\to+\infty} e^{3x}-e^{2x}$

Procédure :
1) On factorise par l'exponentielle avec le plus grand exposant.
2) On simplifie l'expression avec la propriété : $\frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$
3) On calcule la limite de la nouvelle expression obtenue.

Exemples : *Calculer* $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}$ *ou* $\lim_{x\to+\infty} e^{3x}-e^{2x}$

A vous de jouer : *Calculer* $\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{3x}-1}{e^{2x}+e^x}$

Problème F : Lever une indétermination d'une limite avec des exponentielles et des polynomes.
<u>*Questions-types :*</u> - *Calculer* $\lim_{x\to+\infty} e^x - 2x$ *ou* $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$
<u>Procédure :</u> 1) L'objectif est de faire apparaître les limites de cours : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ ou $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ 2) Plusieurs méthode sont envisageable : - On peut essayer de factoriser par l'exponentielle ou par le terme de plus haut degré du polynôme. - On peut essayer de procéder à un changement de variable du type X = -x (ou autre) qui permet transformer la limite en : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to-\infty} f(X)$ 3) On peut constater que $\frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$.
<u>Exemples :</u> *Calculer* $\lim_{x\to+\infty} e^x - 2x$ *ou* $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$
<u>A vous de jouer :</u> *Calculer* $\lim_{x\to+\infty} e^x - x + 3$ *ou* $\lim_{x\to+\infty} xe^{-2x} - 2x + 1$.