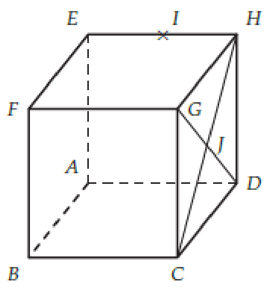
ORTHOGONALITE ET DISTANCES DANS L'ESPACE :

Exercice 1 (calcul de produit scalaire) :

Partie 1 :

On considère le cube suivant, d'arête $a > 0$ où I est le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.



En considérant des décompositions sur les arêtes du cube, exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{FH}$
2) $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IH}$
3) $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{IF}$
4) $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{EJ}$
5) $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$
6) $\overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{CH}$

Partie 2 :

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux :

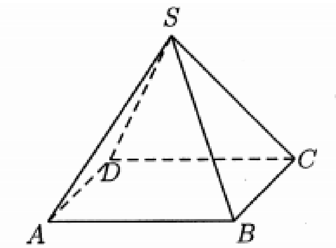
1) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$

3) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4\\24\end{pmatrix}$

Partie 3 :

$SABCD$ est une pyramide à base carrée de sommet S et dont toutes les côtés ont la même longueur a. Calculer en fonction de a, les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$
2. $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$
3. $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC}$
4. $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}$

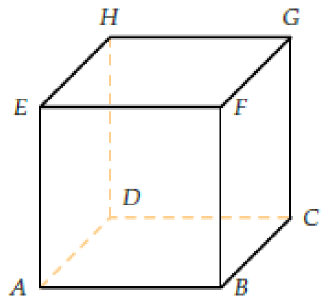


Exercice 2 (Orthogonalité) :

Partie 1 :

1) Démontrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (BCG).
2) En déduire que les droites (AB) et (CF) sont orthogonales.

$ABCDEFGH$ est un cube.



Les droites suivantes sont-elles orthogonales ? Le démontrer.

1) (EG) et (GC) ;
2) (EB) et (EG) ;
3) (AF) et (BC) ;
4) (AC) et (HF) ;
5) (BD) et (EC) ;
6) (CE) et (AG).

Partie 2 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère $\vec{u}\begin{pmatrix}k\\-2\\k-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\k\\k\end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$. Déterminer la ou les valeurs de k pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

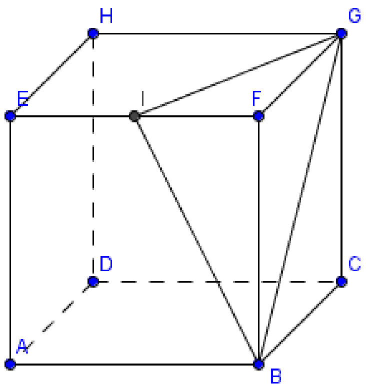
Partie 3 :

Montrer que les droites (AB) et (CD) suivantes sont orthogonales ? Sont-elles perpendiculaires ?

Soit $A(-1;0;2)$, $B(1;1;3)$, $C(-2;1;4)$ et $D(0;1;0)$.

Soit $A(-1;1;3)$, $B(2;-1;-2)$, $C(0;1;-4)$ et $D(2;-1;-2)$.

Partie 4 :



ABCDEFGH est un cube. Le point I est le milieu de [EF].
On souhaite construire la droite (d), orthogonale au plan (BIG) passant par F.

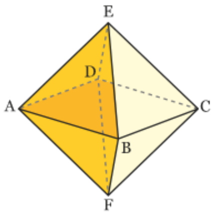
1) Déterminer le plan orthogonal à la droite (BG), passant par F.

2) a) Soit J le milieu du segment [EH]. Démontrer que les droites (IG) et (JF) sont orthogonales.
b) Déterminer le plan orthogonal à la droite (IG) passant par F.

3) En déduire que la droite (d) passe par le centre K de la face ADHE et construire l'intersection de la droite (d) et du plan (BIG)

Partie 5 :

ABCDEF est un octaèdre régulier composé de huit faces qui sont toutes des triangles équilatéraux. Les points A, B, C et D sont coplanaires.



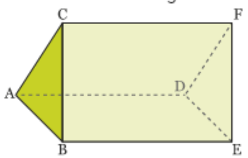
1. Montrer que ABCD est un carré.

2. Soit O le centre du carré ABCD. Montrer que $O \in (EF)$.

3. Montrer que la droite (EF) est orthogonale au plan (ABC).

Partie 6 :

Soit ABCDEF un prisme droit à base triangulaire. On note G le centre de gravité de ABC et G′ celui de DEF.



Montrer que $\overrightarrow{GG'}$ est orthogonal au plan (ABC).

Partie 7 :

Dans le cube ABCDEFGH, on place un point M quelconque sur le segment [AB]. On note I le milieu de [MF] et J celui de [MC].

1. Montrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (FC) puis en déduire que (IJ) est parallèle à (ED).

2. En déduire que (IJ) est orthogonale au plan (ABG).

3. En déduire que (IJ) est orthogonale à (BH).

Partie 8 :

Dans le cube ABCDEFGH, dans chacun des cas montrer que les droites sont orthogonales :

1) (FG) et (AB)   2) (HG) et (FC)   3) (EB) et (GD)   4) (NF) et (HD)

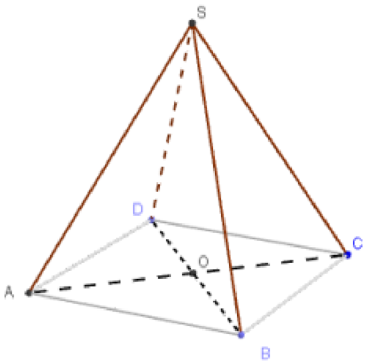
Partie 9 :

Dans le cube ABCDEFGH, dans chacun des cas montrer que la droite et le plan sont orthogonaux :

1) (AB) et (BFG) 2) (DG) et (BCE) 3) (AF) et (CEH) 4) (MI) et (CHE)

Partie 10 :

Soit la pyramide SABCD régulière à base carrée ci-contre . On note I le milieu de [BC].
1) Démontrer que les droites (SO) et (BC) sont orthogonales.
2) En déduire que la droite (BC) est orthogonale au plan (SOI).



Exercice 3 (Calculs grandeurs) :

Partie 1 :

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1;-2;3)$, $B(-1;0;1)$ et $C(2;1;0)$.
Calculer, au dixième de degré près, une mesure des angles :

1) $\widehat{ABC}$ 2) $\widehat{BAC}$ 3) $\widehat{ACB}$

Partie 2 :

En calculant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{DI}$, déterminer cos $\widehat{NDI}$, et déduire une valeur approchée à 10^{-1} près de $\widehat{NDI}$.

Partie 3 :

Pour les exercices 5 à 8, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit $A(3;4;-2)$, $B(1;6;0)$ et $C(-2;2;1)$

Montrer que le triangle ABC est rectangle et indiquer en quel point.

Partie 4 :

Soit $M(3;-4;-2)$, $N(-1;3;2)$ et $P(7;-1;3)$

Démontrer que MNP est isocèle et déterminer à 10^{-1} près tous les angles du triangle.

Partie 5 :

Soit $E(-3;2;1)$, $F(1;-1;3)$, $G(5;1;-3)$ et $H(1;4;-5)$

Montrer que EFGH est un quadrilatère puis déterminer sa nature.

Partie 6 :

On donne les points $A(2;3;-1)$, $B(2;8;-1)$, $C(7;3;-1)$ et $D(2;-1;2)$. Démontrer que les points B, C et D sont sur une même sphère de centre A.

Partie 7 :

On donne les points $A(5;1;3)$, $B(5;-3;-1)$, $C(1;1;-1)$ et $D(1;-3;3)$. Démontrer que le teraèdre ABCD est régulier c'est à dire que toutes ses faces sont des triangles équilatéraux.

Partie 8 :

Soit les points $A(0;-1;3)$ et $B(-1;2;5)$.

Montrer que le point $H(1;-4;1)$ est le projeté orthogonal du point $C(5;-2;0)$ sur la droite (AB).

Partie 9 :

Dans un cube ABCDEFGH de côté a, on considère les points M, N et P centres respectifs des faces EFGH, BCGF et ABFE.

1) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{GP}$.

2) Montrer que (DF) est perpendiculaire à (MNP).

3) Soit T le point d'intersection de (DF) et (MNP).

Montrer que T est le projeté orthogonal de N sur (DF).

4) En calculant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DN}$, déterminer le distance du point D au plan (MNP)

Partie 10 :

Soient les points A(-3 ; 4 ;2), B(2 ; 1 ;5) $C(3\,;2;2)$ et $D(-1\,;-3;-1)$

1) Calculer les longueurs AB et AC.

2) En déduire l'angle $\widehat{ABC}$

3) Calculer la distance entre A et la droite (BC)

4) Calculer l'aire du triangle ABC

5) Calculer la distance entre le point D et le plan (ABC)

6) Calculer le volume du tétraèdre ABCD

Exercice 4 (Plan médiateur - synthèse) :

Dans le cube ABCDEFGH :

1) Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont orthogonaux.

2) Démontrer que (DF) est perpendiculaire à (BEG).

3) (BEG) est-il le plan médiateur de [DF] ?

Exercice 5 (Synthèse) :

Partie 1 :

On se propose dans cet exercice, d'étudier des propriétés d'un solide de l'espace.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(3 ; 4 ; 0) ; B(0 ; 5 ; 0) et C(0 ; 0 ; 5). On note I le milieu du segment [AB].

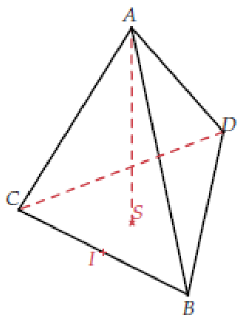
1. Faire une figure où l'on placera les points A, B, C, I dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
2. Démontrer que les triangles OAC et OBC sont rectangles et isocèles.
   Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Soit H le point de coordonnées $\left(\frac{15}{19} ; \frac{45}{19} ; \frac{45}{19}\right)$.
   a. Démontrer que les points H, C, I sont alignés.

b) Démontrer que (HO) est la hauteur issue de O du tétraèdre OABC.

4. **Calculs d'aire et de volume.**
   a. Calculer l'aire du triangle OAB. En déduire le volume du tétraèdre OABC.
   b. Déterminer la distance du point O au plan (ABC).
   c. Calculer l'aire du triangle ABC.

Partie 2 :

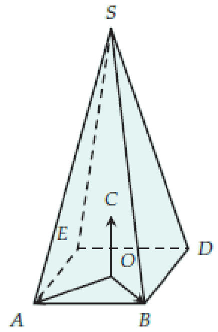
Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier et I le milieu de $[BC]$.



1) Démontrer que la droite (BC) est orthogonale au plan (ADI).
2) En déduire que $(BC) \perp (AD)$.

Partie 3 :

Soit $SABDE$ une pyramide à base carrée $ABDE$ de centre O. On note C le point de l'espace tel que $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ soit un repère orthonormé. Dans ce repère, soit S le point de coordonnées $(0;0;3)$.



PARTIE A

1) Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire U et démontrer que $U\left(0;\frac{2}{3};1\right)$.
2) Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SD). Démontrer que les droites (UV) et (BD) sont parallèles.
   Construire V et déterminer ses coordonnées.
3) Soit $K\left(\frac{5}{6};-\frac{1}{6};0\right)$.
   a) Démontrer que K est le pied de la hauteur issue de U du trapèze $AUVE$.
   b) Démonter que l'aire de ce trapèze est $\frac{5\sqrt{43}}{18}$.

Partie 4 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Les points A, B et C ont pour coordonnées A(3; −2; 2), B(6; 1; 5), C(6; −2; −1).

1) Soit D le point de coordonnées (0; 4; −1). Prouvez que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
3) Prouvez que l'angle $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ radian.
4) a) Calculez l'aire du triangle BDC.
   b) Déduisez-en la distance du point A au plan (BDC).

Partie 5 :

Soit un cube ABCDEFGH de côté 4 cm et le point O centre du carré EFGH.

1) Déterminer l'intersection des plans (EDG) et (HFB).

2) Calculer $\tan \widehat{HDO}$ et $\tan \widehat{DBH}$.

3) En déduire que les droites (HB) et (DO) sont orthogonales.

4) Démontrer que les droites (HD) et (EG) sont orthogonales.

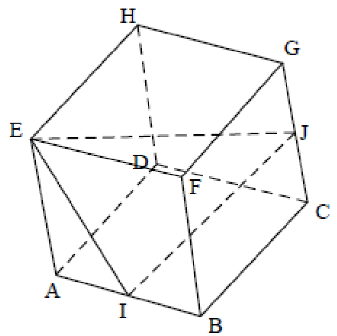
5) En déduire que la droite (EG) est orthogonale au plan (HFB), puis orthogonale à la droite (HB).

6) Démontrer que la droite (HB) est orthogonale au plan (DEG).

Exercice 6 (Vrai/faux) :

Partie 1

On donne le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes [AB] et [CG]. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre.



Affirmation 1 :

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}$

Affirmation 2 :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}$

On utilise à présent le repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Affirmation 3 :

Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ).

Affirmation 4 :

Le volume du tétraèdre EFIJ est égal à $\frac{1}{6}$.

Partie 2

Soit $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.
On considère les points

$$A(2\,;\,4\,;\,1),\ B(0\,;\,4\,;\,-3),\ C(3\,;\,1\,;\,-3),\ D(1\,;\,0\,;\,-2),\ E(3\,;\,2\,;\,-1),\ I\left(\frac{3}{5}\,;\,4\,;\,-\frac{9}{5}\right)$$

Affirmation 1 :

Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

Affirmation 2 :

Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Affirmation 3 :

Exercice 7 (QCM) :

ABCD est un tétraèdre quelconque. Soit P le plan passant par A et orthogonal à la droite (BC).

a. Le plan P contient toujours le point D.

b. Le plan P contient toujours la hauteur (AH) du triangle ABC.

c. Le plan P est toujours l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

d. Le plan P est toujours le plan médiateur du segment [BC].