METHODES A CONNAITRE – ORTHOGONALITE ET DISTANCE DANS L'ESPACE

Problème A : Calculer un produit scalaire

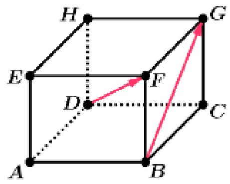
Questions-types : - *Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$*

Procédure :
- Si on peut accéder aux coordonnées des vecteurs, on utilise de préférence la formule utilisant les coordonnées. En présence d'angles droits, il peut être judicieux de créer soit même un repère orthonormé.
Sinon, on liste ce que l'on connaît :
- Si on connaît un angle et deux longueurs, on s'oriente vers la formule avec l'angle.
- Si on ne connaît que des longueurs, on utilisera celle sur les normes.
- Si on identifie des angles droits, on utilise la technique du projeté orthogonale.

Exemples :

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BG}$:
1) sans utiliser de repère.
2) à l'aide d'un repère.



A vous de jouer :

calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$

Problème B : Démontrer une orthogonalité

Questions-types : Démontrer que (AB) et (DC) sont orthogonales.
Démontrer que la droite (AB) est orthogonales au plan (DEF)

Procédure :

Démontrer que deux droites sont orthogonales :

Sans vecteur
1) On prouve qu'elles sont respectivement parallèles à deux droites perpendiculaires du plan.
2) On prouve que l'une est contenue dans un plan orthogonal à l'autre.

Avec vecteur
1) Extraire un vecteur directeur pour chacune des droites $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et montrer que $\vec{u}.\vec{v} = 0$

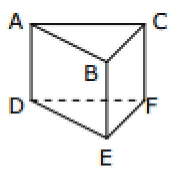
Démontrer qu'une droite et un plan sont orthogonales :

Sans vecteur
On prouve que la droite est orthogonale à deux droites sécantes du plan.

Avec vecteur
1) Extraire un vecteur directeur pour la droite $\vec{u}$ et deux vecteurs directeurs du plan $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ montrer que $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et que $\vec{u}.\overrightarrow{v'} = 0$
Ou
2) Extraire un vecteur directeur pour la droite $\vec{u}$ et un vecteurs normal du plan $\vec{n}$ montrer que $\vec{u}.\vec{n} = 0$

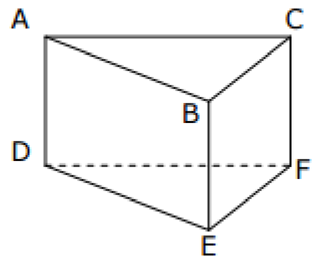
Exemples :

ABCDEF est un prisme droit tel que ABC est un triangle rectangle en B.
Démontrer que les droites (AB) et (CF) sont orthogonales.
Démontrer que les droites (DE) et (BC) sont orthogonales.



Les droites (AB) et (AC) sont-elles orthogonales ? A(0 ; 1 ; 2), B(2 ; 0 ;2) et C(-2 ; 0 ; 1)

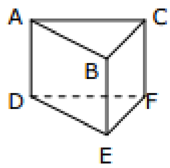
ABCDEF est un prisme droit tel que ABC est un triangle rectangle en B.
Démontrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (CEF).



La droite (AB) est-elle orthogonale au plan (DEF) ? A(0 ; 4 ; 5) ; B(-4 ; 0 ; 1) ; D(-3 ; 4 ; 5) ; E(-1 ; 1 ; 7) et F(-2 ; -2 ; 1)

A vous de jouer :

ABCDEF est un prisme droit tel que ABC est un triangle rectangle en B.
Démontrer que les droites (AB) et (CE) sont orthogonales.



Démontrer que la droite (AD) est orthogonale au plan (DEF).

Problème C : Calculer des grandeurs (longueurs, angles, aires, volume)

Questions-types : - Calculer la distance AB

- *Calculer l'angle $\widehat{ABC}$*

Procédure :

Calculer une distance AB

1) Sans vecteur, utiliser Pythagore, Thalès, propriétés des figures…

2) Avec vecteur,

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Calculer un angle $\widehat{ABC}$

1) Sans vecteur, utiliser la trigonométrie, les propriétés des angles, etc…

2) Avec vecteur, calculer le produit scalaire de deux manières (dont une avec les coordonnées) de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

Puis on utilise : $cos(B\hat{A}C) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$

Calculer la distance entre un point M et une droite (d) passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$

$$MH^2 = AM^2 - (\frac{\overrightarrow{MA}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|})^2$$

Calculer la distance entre un point M et un plan (P) passant par A de vecteur normal $\vec{n}$

$$MH^2 = \frac{\overrightarrow{MA}.\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$$

Calculer d'autres grandeurs : Volumes, Aires :

1) Pour calculer des aires il faut définir une base (calcul d'une distance) et une hauteur (distance d'un point par rapport à une droite)

Exemples : Soient les points A(5 ; 4 ;3), B(1 ; 0 ;4) $C(1\,;2;-1)$ et $D(0\,;0;-1)$

1) Calculer les longueurs AB et AC.
2) En déduire l'angle $\widehat{ABC}$
3) Calculer la distance entre A et la droite (BC)
4) Calculer l'aire du triangle ABC
5) Calculer la distance entre le point D et le plan (ABC)

6) Calculer le volume du tétraèdre ABCD

A vous de jouer :

Soients les points A(-2 ; 1 ;2), B(3 ; -4 ;5) $C(2\,;1;3)$ et $D(1\,;-2;-1)$

1) Calculer les longueurs AB et AC.

2) En déduire l'angle $\widehat{ABC}$

3) Calculer la distance entre A et la droite (BC)

4) Calculer l'aire du triangle ABC

5) Calculer la distance entre le point D et le plan (ABC)

6) Calculer le volume du tétraèdre ABCD