ORTHOGONALITE ET DISTANCES DANS L'ESPACE

Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace :

Propriétés du produit scalaire :

- symétrie : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- linéarité : $\vec{u}.(k\vec{v}) = k \times \vec{u}.\vec{v}$ et $\vec{u}.(\vec{w}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{w} + \vec{u}.\vec{v}$
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens

$\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire.

- $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

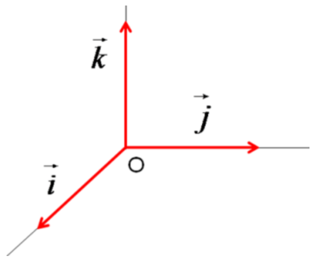
Orthogonalité de deux vecteurs :

- $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Base et repère orthonormés de l'espace :

Base : Si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ alors $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de l'espace.

Repère : Soit O, un point de l'espace alors $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.



Produit scalaire avec des coordonnées :

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

dans un repère nécessairement orthonormé !

Norme d'un vecteur à partir des coordonnées :

Norme d'un vecteur = longueur du segment associé.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Formules de polarisation :

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2)$

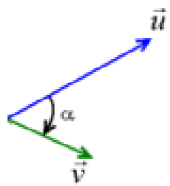
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{CA}\|^2\right) = \frac{1}{2}(CB^2 - AB^2 - CA^2)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2\right) = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - CB^2)$

Calcul du produit scalaire avec un angle :

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u};\vec{v})$



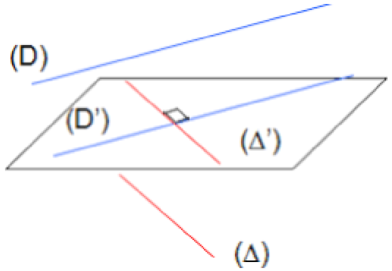
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos(B\hat{A}C)$

Donc : $cos(B\hat{A}C) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$

Orthogonalité :

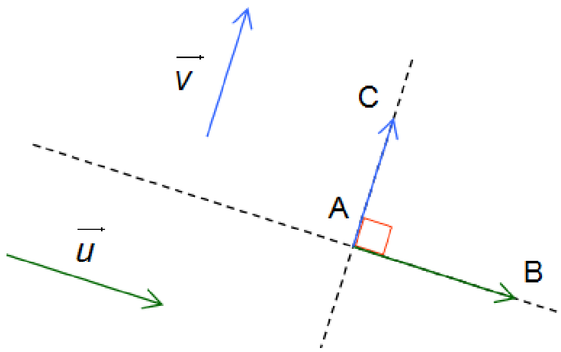
Orthogonalité de deux droites :

Deux droites (d) et (d') sont orthogonales s'il existe une droite (Δ) parallèle à (d) et perpendiculaire à (d')



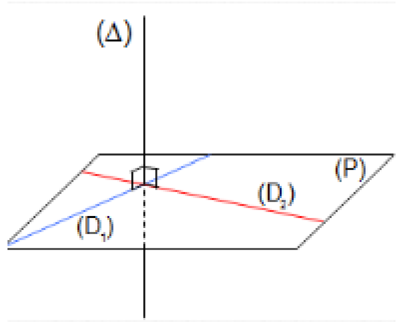
Deux droites (d) et (d') de vecteurs directeur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales ssi $\vec{u}.\vec{v} = 0$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ si et seulement si (AB) et (AC) sont orthogonales.



Orthogonalité d'une droite et d'un plan :

Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.



Une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan (P) de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux ssi $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et

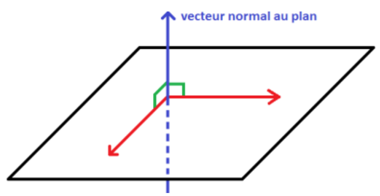
$\vec{u}.\vec{w} = 0$

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\ )$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{CA}\|^2\right) = \frac{1}{2}(CB^2 - AB^2 - CA^2)\ )$

Caractériser un plan par l'orthogonalité :

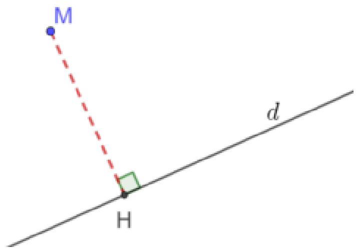
Vecteur normal : Un vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan (P), dirigé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, ssi $\vec{n}.\vec{v} = 0$ et $\vec{n}.\vec{w} = 0$



Il existe un unique plan passant par un point A et ayant pour vecteur normal, un vecteur $\vec{n}$

Projeté orthogonal :

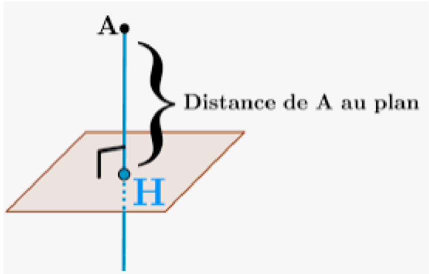
D'un point sur une droite :



- H est le projeté orthogonal de M sur la droite (d) ↔ (HM) ⊥ (d) et H un point de (d)

- MH est la distance entre M et la droite (d)

D'un point sur un plan :



- H est le projeté orthogonal de A sur le plan (P) ↔ (HA) ⊥ (P) et H un point de (P)

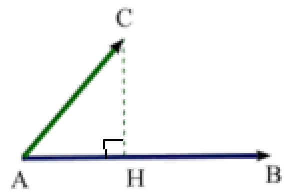
- AH est la distance entre A et le plan (P)

Calcul du produit scalaire avec le projeté orthogonal :

$\vec{u'}$est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur la droite générée par le vecteur $\vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u'}\right\| \times \|\vec{v}\|si\vec{u'}$ et $\vec{v}$ sont de même sens

$\vec{u}.\vec{v} = -\left\|\vec{u'}\right\| \times \|\vec{v}\|si\vec{u'}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire.

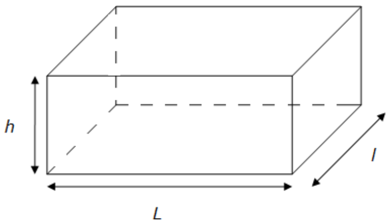
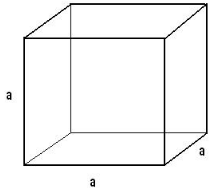
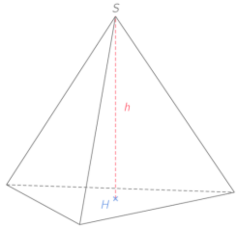
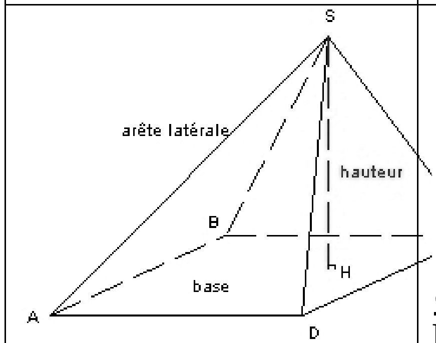
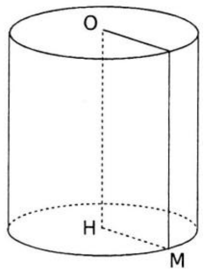
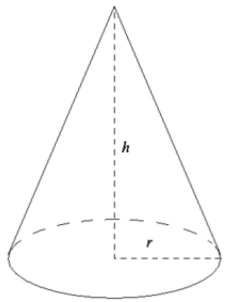


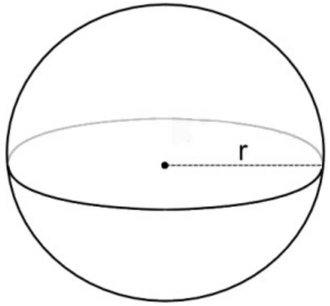
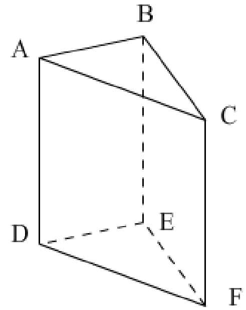
H est le projeté de C sur la droite (AB).

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB \times AHsi\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -AB \times AHsi\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire.

Figures remarquables de l'espace :

 **Parallélépipède rectangle (ou pavé).** **Faces :** 6 faces rectangulaires, les faces opposées sont parallèles. **Volume :** $V = h \times l \times L$	 **cube** **Faces :** 6 faces carrés, les faces opposées sont parallèles. **Volume :** $V = a \times a \times a = a^3$	 **tétraèdre** C'est une pyramide dont la base est un triangle. 4 faces triangulaires. **Volume :** $V = \frac{1}{3} \times Aire_{Base} \times hauteur$
 **Pyramide (à base quelconque)** **Base :** Face du dessous qui peut être quelconque (octogone, rectangle, carré,…)	 **Cylindre de révolution** **Base :** circulaire **Génération :** Un cylindre est généré par la rotation d'un rectangle autour de la hauteur OH. **Volume :** $V = Aire_{Base} \times hauteur$	 **Cône de révolution** **Base :** circulaire **Génération :** Un cylindre est généré par la rotation d'un triangle rectangle

Faces : 1 + le nombre de cotés de la base. Ce sont tous des triangles. **Volume :** $V = \frac{1}{3} \times Aire_{Base} \times hauteur$		autour de la hauteur h **Volume :** $V = \frac{1}{3} \times Aire_{Base} \times hauteur$
 **Sphère** **Génération :** rotation d'un cercle autour d'un diamètre de la sphère. **Volume :** $V = \frac{4\pi}{3} r^3$	 **Prisme droit** **Faces :** deux face parallèles **Volume :** $Aire_{Base} \times hauteur$	

Aire d'un triangle : $A = \frac{base \times hauteur}{2}$

Aire d'un rectangle : $A = L \times l$

Aire d'un disque : $A = \pi \times r^2$

Démonstration : Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan P est le point de P le plus proche de M

Approfondissements :

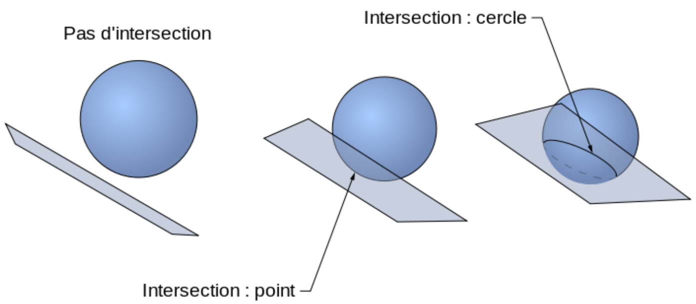
Intersection d’un plan et d’une sphère :

Soit une sphère S de centre O et de rayon R et P un plan de l’espace situé à une distance d du centre de la sphère.

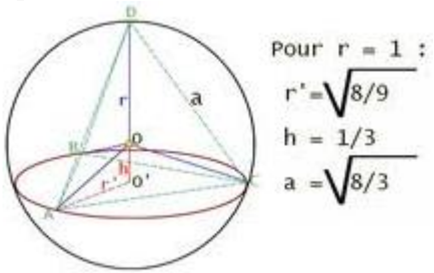
Si $d > R$ alors S et P n’ont pas de points communs

Si $d = R$ alors P est tangent à S

Si $d < R$ alors l’intersection de S et P est un cercle de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$



Sphère circonscrite à un tétraèdre



La sphère circonscrite à un tétraèdre est la sphère dont tous les sommets du tétraèdre sont situés sur la surface de la sphère et dont le centre de la sphère est le barycentre du tétraèdre.

Fonction scalaire de Leibniz

On considère n points A_i affectés d’un coefficient α_i A tout point M du plan on associe le nombre :

$$f(M) = \sum \alpha_i M{A_i}^2$$

Méthodes (exercices) :

	Hachette	**Hatier**	**Mes exos**	**Sesamaths**
A) Calcul de produit scalaire	1-11	34,59-64	Ex. 1	70
B) Orthogonalité	13-28,39	35,36,37-38,68-70,81-88	Ex. 2	71,73
C) Calculs de grandeurs	29-35,43,53	39-44,102-108,111-113	Ex. 3	72

Exercices de synthèse :

	Hachette	**Hatier**	**Mes exos**	**Sesamaths**
Synthèse	48,52,62,67-74	119-122,129,133-137	Ex.4 et 5	74,75
Vrai/faux	64		Ex. 6	
Approfondissement	59-61	124-125		
QCM	65-66		Ex. 7	