PRIMITIVES ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES - COURS

Primitive : On dit que F est une primitive de f sur I, si pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.
La fonction G(x) = F(x) + C avec C un réel, est une primitive de f (infinité de primitives)
Il existe une seule primitive F, telle que F(a) = b.

Tableau de primitives :

Primitives usuelles : (C est une constante réelle)

fonction f	**Primitive F**
k un réel	$kx + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$ (sur R^+)
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
e^x	$e^x + C$

Primitives de fonctions composées : (C est une constante réelle et u une fonction)

fonction f	**Primitive F**
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C$ (sur R^+)
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+C$
$u'\cos u$	$\sin u + C$
$u'\sin u$	$-\cos u + C$
$u'e^u$	$e^u + C$
$u'(v'\circ u)$	$v \circ u$

Equations différentielles :

Ce sont des équations où l'inconnue est la fonction. L'équation comporte la fonction ainsi que une ou plusieurs de ses dérivées

Equations de la forme $y' = ay$ avec $a \neq 0$

Les solutions sont de la forme $y(x) = Ce^{ax}$ avec C un réel
Si de plus on sait que $y(x_0)= y_0$ alors on détermine la solution en posant une équation pour trouver C.

Equations de la forme $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$

Les solutions sont de la forme $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ avec C un réel
Si de plus on sait que $y(x_0)= y_0$ alors on détermine la solution en posant une équation pour trouver C.

Equations de la forme $y' = ay + f(x)$ avec $a \neq 0$

Les solutions sont de la forme $y(x) = Ce^{ax} + yp(x)$ avec C un réel et yp(x) une solution particulière que l'on déterminera avec l'énoncé.
Si de plus on sait que $y(x_0)= y_0$ alors on détermine la solution en posant une équation pour trouver C.

Démonstrations :

- Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante
- Résolution de y'= ay

Algorithme : Utiliser la méthode d'Euler pour avoir une solution approchée d'une équation différentielle (tracé de graphique)

On utilise l'approximation affine suivante (assimilation d'une fonction à sa tangente) : $y(x_0 + p) \approx y(x_0) + py'(x_0)$ on exprime $y'(x_0)$ en l'isolant dans l'équation différentielle soit : $y'(x_0) = a\times y(x_0) + b$

Langage naturel (méthode d'euler)	**Python**

Saisir a et b et y_0 et x_0
L et T sont des listes
L←y_0
T←x_0
n←1
Tant que T[n-1]<fin (valeur finale du tracé)
   L←L[n-1]+p×(a×L[n-1]+b)
   T←T[n-1]+p
Fin Tant que
Tracer un graphique de T et L
	`from pylab import*`
	`def euler(a,b,x0,y0,p):`
	`    L=[]`
	`    T=[]`
	`    L.append(y0)`
	`    T.append(x0)`
	`    n=1`
	`    while T[n-1]<fin:`
	`        L.append(L[n-1]+p*(a*L[n-1]+b))`
	`        T.append(T[n-1]+p)`
	`        n=n+1`
	`    plot(T,L)`

Approfondissements :
Autres formes d'équations

Méthodes (exercices) :

	Hachette	**Hatier**	**Mes exos**	**Sesamaths**
A) Déterminer les primitives d'une fonction	8-9,12,42-44,48	34,56-59	1	60
B) Déterminer la primitive vérifiant une condition	17	35,60-61	2	61
C) Vérifier qu'une fonction est une primitive	20,45-47		3	
D) Résoudre une equation différentielle de la forme y'=ay+b	21-25,29-32	36-39,76-83	4	62
E) Résoudre une equation différentielle de la forme y'=ay+f(x)	37-40	40-42,100-105	5	63

Exercices de synthèse :

	Hachette	**Hatier**	**Mes exos**	**Sesamaths**
Algorithmes	70	110-111		
Synthèse maths primitives			6	64
Synthèse maths équa diff	86	130-131	7	
Synthèse concrete	59,61,64,71,78-82,88-89	43, 89,97-99,114-116,128,132	8	66
QCM	5,65,85	129	11	67
Vrai/faux	41,52,56,83	69,90,109	10	65
Prise d'initiative			-	
Approfondissement		119-123	9	68-69