RESUME – SUCCESSION D'EPREUVES INDEPENDANTES – SCHEMA DE BERNOULLI

Rappels :

Définition - Vocabulaire

On appelle **expérience aléatoire** une situation dont le résultat est dû au hasard.

On appelle **univers** (noté Ω), l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.

On appelle **issue (ou éventualité, évènement élémentaire)** un résultat possible de l'expérience

On appelle **évènement,** une partie de l'univers, donc un certains nombres d'issues.

Ex : On lance un dé à six faces = expérience aléatoire. Les issues possibles sont : 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 l'univers est donc : Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.

L'évènement : « Avoir un chiffre pair » contient les issues 2, 4 et 6.

Loi de probabilités

Pour une expérience aléatoire donnée, on associe une probabilité p comprise entre 0 et 1 à chaque issue de l'expérience. La somme des probabilités de chacune des issues doit être égale à 1.On a alors défini une **loi de probabilités**.

Ex : On lance un dé à six faces équilibré, on considère que l'on a autant de chance d'avoir chacune des faces. Voici la loi de probabilité issue de ce raisonnement :

Issue	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Situation d'équiprobabilité : On est dans une situation d'équiprobabilité lorsque toutes les issues de l'expérience aléatoire ont une même probabilité de se réaliser. Pour un évènement A, on a :

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{\boldsymbol{card\ A}}{\boldsymbol{card\ \Omega}} = \frac{\boldsymbol{Nombre\ des\ issues\ favorables\ à\ A}}{\boldsymbol{Nombre\ total\ des\ issues\ de\ \Omega}}$$

Règles de calcul des probabilités

Soient A et B deux évènements de Ω.

- P(A ∩ B) : C'est **la probabilité de l'intersection** des deux évènements. Avoir A et B en même temps.

- P(A U B) : C'est **la probabilité de la réunion** des deux évènements. Avoir A, B ou les deux en même temps. $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$**.**

- On appelle **évènement contraire** d'un évènement A, On le note $\boldsymbol{\bar{A}}$: $\boldsymbol{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$

- Deux évènements sont **incompatibles** s'ils n'ont pas d'issues communes. Dans ce cas $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

- On appelle $\emptyset$ **: l'ensemble vide**. C'est un évènement qui ne contient aucune issue $\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$.

$\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$**, c'est l'évènement certain.**

Probabilités conditionnelles :

La probabilité de A sachant que l'évènement B est réalisé se note : $p_B(A)$

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

On a également : $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$

$p_B(\bar{A}) = 1 - p_B(A)$

Représentation des probabilités

Arbres :

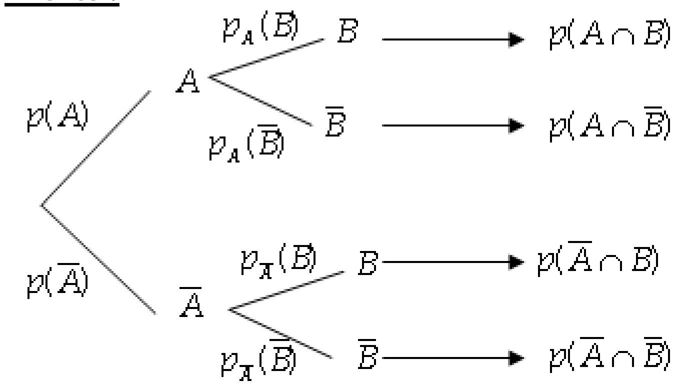


Tableau à double entrée :

	A	$\bar{A}$	Total
B	p($A \cap B$)	p($\bar{A} \cap B$)	p(B)
$\bar{B}$	p($A \cap \bar{B}$)	p($\bar{A} \cap \bar{B}$)	p($\bar{B}$)
Total	p(A)	p($\bar{A}$)	1

Tableau à double entrée (ou des effectifs)

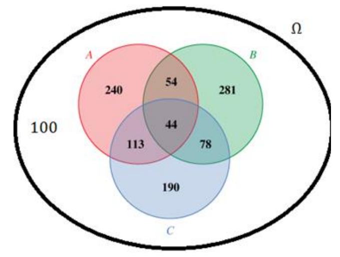


Diagramme de Venn

<u>Probabilités totales :</u>

$p(B) = \sum p(B \cap A_i)$ *Ex avec l'arbre précédent :* $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A})$ *(c'est une partition complète de l'univers)*

<u>Indépendance :</u>

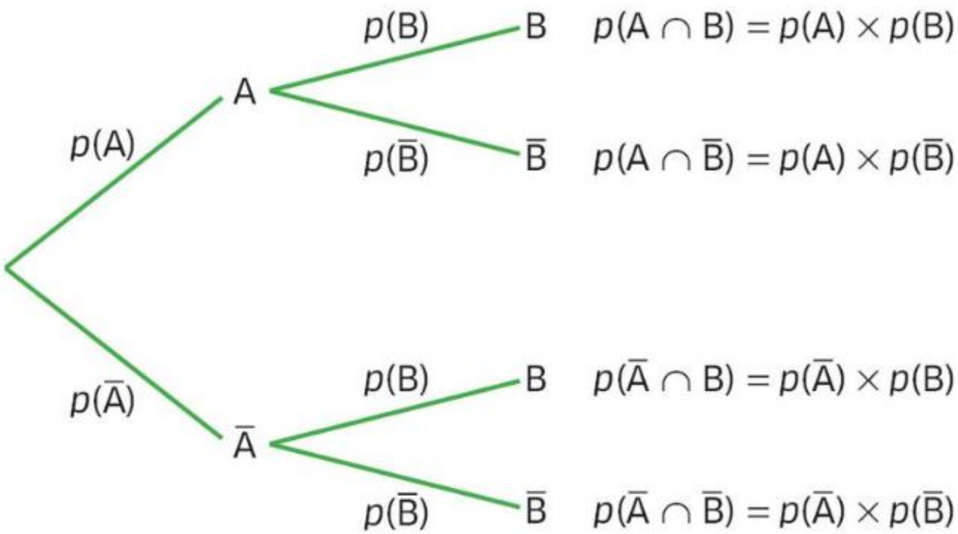
Deux évènements A et B sont indépendants ↔

$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

$p_B(A) = p(A)$ et $p_A(B) = p(B)$

Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B le sont

<u>Succession de deux épreuves indépendantes (représentation)</u>



<u>Variables aléatoires :</u>

<u>Définition :</u>

On se place dans le cadre d'une expérience aléatoire dont les issues sont contenues dans l'univers Ω (un ensemble fini)

Une variable aléatoire X, associe à chaque issue de l'expérience, un nombre réel x_i.

X est donc une fonction :

$X : \Omega \rightarrow R$

$\omega_i \rightarrow x_i$

L'ensemble des valeurs x_i prises par X est noté X(Ω)

L'évènement $\{X = x_i\}$ correspond à l'union de toutes les issues de l'expérience aléatoires auxquelles la valeur x_i est associée.

La probabilité de cet évènement se note : $\mathbf{p(X = x_i)}$

<u>Loi de probabilités</u>

Pour chaque valeur, $\mathbf{x_i}$, prise par la variable aléatoire, on peut associer une probabilité $\mathbf{p(X = x_i)}$

On regroupe toutes les valeurs dans un tableau :

$\boldsymbol{X = x_i}$	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$\boldsymbol{p(X = x_i)}$	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Ce tableau est **la loi de probabilité** de la variable X

$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$

<u>Espérance - Variance et écart type :</u>

On note E(X) **l'espérance** de X (la valeur moyenne prise par X si on répète un grand nombre de fois l'expérience) :

$$\boldsymbol{E(X) = \sum x_i \times p(X = x_i)}$$

<u>Propriété :</u> $E(aX + b) = aE(X) + b$ (linéarité de l'espérance)

Si E(X) > 0 alors le jeu est favorable au joueur

Si E(X) < 0 il lui est défavorable

Si E(X) = 0, le jeu est dit équitable

On note V(X) **la variance** de X :

$$\boldsymbol{V(X) = \sum (x_i - E(X))^2 \times p(X = x_i)}$$

<u>Formule de Konig-Huygens :</u> $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

<u>Propriété :</u> $V(aX) = a^2 V(X)$

On note σ(X) l'écart-type de X : $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

Loi binomiale (programme terminale)

Définition :

On appelle **épreuve de Bernoulli**, une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles. Une des issues est appelée **le succès et l'autre l'échec.** On note **p** la probabilité du succès et **q = 1 – p** la probabilité de l'échec (évènement contraire du succès).

Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de **n épreuves de Bernoulli identiques dans des conditions d'indépendance**.

On dit alors que X, la variable aléatoire qui compte le nombre k de succès, suit une **loi binomiale** de paramètre n et p que l'on peut noter **X → B(n,p)**

Coefficients binomiaux

$\binom{n}{k}$: se lit k parmi n.

Le nombre obtenu indique le nombre de façons différentes d'obtenir k succès parmi n tentatives.

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

La probabilité d'avoir exactement k succès : $\boldsymbol{p(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$

Espérance - Variance et écart type :

On note E(X) l'espérance de X (résultat moyen) : $\boldsymbol{E(X) = n \times p}$

On note V(X) la variance de X : $\boldsymbol{V(X) = n \times p \times (1-p)}$

On note σ(X) l'écart-type de X : $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

Algorithme :

Planche de Galton (voir exercice 90 hatier)

Détermination du plus petit k tel que p(X > k) ≤ α :

Langage naturel	Python

Saisir alpha, p, n
k ← 0
prob ← $(1\text{-}p)^n$
tant que prob ≤ 1-alpha
k← k+1
prob← prob+formule binomiale
FinTant que
Renvoyer (k)
	`def seuil(alpha,n,p):`
	`k=0`
	`prob=(1-p)**n`
	`while prob<=1-alpha:`
	`k=k+1`
	`prob=prob+combinaison(k,n)*(p**k)*((1-p)**(n-k))`
	`return(k)`

Simulation d'un échantillon d'une variable aléatoire :

-

Démonstrations : - Probabilité d'avoir k succès

- Formule de l'espérance et de la variance.

Approfondissements

Nom et conditions	**Loi de probabilité**	**Espérance**	**Variance**
Loi géométrique $\boldsymbol{\mathcal{G}(p)}$ On répète une épreuve de Bernoulli jusqu'à obtenir un succès de probabilité p. On obtient le rang du premier succès	$\mathrm{p}(X=k) = (1-p)^{k-1}p$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$
Loi Poisson $\boldsymbol{\mathcal{P}(\lambda)}$ Avec λ un réel positif Modélise les phénomènes rares. Loi limite pour approximer les autres lois.	$\mathrm{p}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \times e^{-\lambda}$ Si $n \geq 30$ et $p \leq 0{,}1$ et $np \leq 10$ On peut approximer la loi B(n,p) par P(np)	$E(X) = \lambda$	$V(X) = \lambda$

Méthodes (exercices) :

	Hachette	**Hatier**	**Mes exos**	**Sesamaths**
Révisions			1	-
A) Justifier que l'on a une loi binomiale	9-11	67	2	39
B) Modéliser la situation	1-8	33-34,48,51,53	3	38
C) Calculer une probabilité	14,35,42	35	4	40
D) Espérance et interprétation	25-34	36	5	41
E) Chercher un intervalle vérifiant une condition		37-38	6	42

Exercices de synthèse :

	Hachette	**Hatier**	**Mes exos**	**Sesamaths**
Synthèse	43,50,52,56,75,78,80,82-86	73,92-93,104-106	8	44
Vrai/faux			10	
QCM	81		9	
Approfondissements		99,100	-	
Prise d'initiative		103	-	
Algorithmes	49,55	70,90-91,98	7	43