REPRESENTATIONS PARAMETRIQUES ET EQUATIONS CARTESIENNES

Exercice 1 (Equation de droites) :

Partie 1 :

1) a) Déterminer une équation paramétrique de la droite (d) passant par A(1 ; -1 ; -1) et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 1)$

b) Le point D(5 ; -3 ; 1) appartient-il à la droite (d) ?

2) a) Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB) avec B(1 ; 1 ; 1).

b) Les points A, B et D sont-ils alignés ?

3) Déterminer une équation paramétrique de la médiane issue de A dans le triangle ABC avec C(0 ; 3 ; 1)

Partie 2 :

On considère les points $A(-3\ ;\ 2\ ;\ 4)$ et $B(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$. Écrire une représentation paramétrique de la droite (AB).

Partie 3 :

La droite Δ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

1) a) Déterminer le point I de Δ de paramètre 0.

b) Déterminer un vecteur $\vec{u}$ directeur de Δ.

c) Justifier qu'il existe un point de Δ d'abscisse 5.

2) La droite Δ passe-t-elle par le point $A\left(-10; \frac{16}{3}; -\frac{14}{3}\right)$

Partie 4 :

Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

1) Donner un vecteur directeur de la droite Δ et un point de Δ.

2) Le point $M(-3;4;1)$ appartient-il à la droite Δ ?

Exercice 2 (Equation de plan) :

Partie 1 :

1) a) Les points A(2 ; 1 ; 3) ; B(0 ; 1 ;2) et C(2 ; 1 ; - 1) sont-ils alignés ?

b) Déterminer une vecteur normal du plan (ABC)

c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)

2) Déterminer une équation paramétrique du plan (ABC)

3) Le point D(1 ; 2 ; 9) appartient-il au plan d'équation cartésienne $2x + y - z + 5 = 0$

4) Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}(4\,;5\,;\,-6)$

Partie 2 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par $A(-1;2;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Partie 3 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les trois points $A(-1;-1;1)$, $B(1;2;-1)$ et $C(0;1;1)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) s'il existe.

Partie 4 :

Déterminer, dans chaque cas, une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par les points A et de vecteur normal $\vec{n}$.

a) $A(2; 0; 1)$ et $\vec{n}(1; -1; 3)$ b) $A(\sqrt{2}; -2; 5)$ et $\vec{n}(2; -3; -1)$

Partie 5 :

On donne les points $A(1; -1; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(2; 1; 3)$, $D(4; -6; 2)$ et $E(6; -7; -1)$.

1) Démontrer que les points A, B et C définissent un plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{DE}$.

2) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$

Exercice 3 (Coordonnées de projetés) :

Partie 1 :

Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x - 3y + 2z - 5 = 0$ et le point A a pour coordonnées $(2; 3; -1)$. Est-il vrai que le point $H(3; 0; 1)$ est le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}$

Partie 2 :

1) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A(-2 ; 4 ; 5) sur la droite

$(d): \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$ et $(d'): \begin{cases} x = -5 - t' \\ y = 6 + \frac{1}{2}t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$

2) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A(-1 ; 0 ; 1) sur la droite

$(d): \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -6 - 3t \\ z = 21 + 2t \end{cases}$ et $(d'): \begin{cases} x = -3 + 2t' \\ y = 5 - t' \\ z = 7 + 4t' \end{cases}$

Partie 3 :

1) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A(-2 ; 4 ; 5) sur le plan

$(P'): 2x - y + z - 3 = 0$ et $(P): x + 2y - z - 1 = 0$

1) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A(-1 ; 0 ; 1) sur le plan

$(P'): -x + 3y + z - 3 = 0$ et $(P): 2x - 6y - 2z - 1 = 0$

Exercice 4 (Position relative de droites) :

Partie 1 :

Déterminer les positions relatives des droites suivantes. Si les droites sont sécantes, déterminer les coordonnées du point d'intersection. (t et t' sont des réels). Déterminer si les droites sont orthogonales.

1) $(d): \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$ et $(d'): \begin{cases} x = -5 - t' \\ y = 6 + \frac{1}{2}t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$

2) $(d): \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -6 - 3t \\ z = 21 + 2t \end{cases}$ et $(d'): \begin{cases} x = -3 + 2t' \\ y = 5 - t' \\ z = 7 + 4t' \end{cases}$

3) $(d): \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 \\ z = 7 - 5t \end{cases}$ et $(d'): \begin{cases} x = -3 + 2t' \\ y = 5 - t' \\ z = 7 + 4t' \end{cases}$

4) $(d): \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 2 + \frac{3}{2}t \\ z = 19 - 6t \end{cases}$ et $(d'): \begin{cases} x = -3 + 2t' \\ y = 5 - t' \\ z = 7 + 4t' \end{cases}$

Partie 2 :

Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = -5 - 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Dans chacun des cas suivants, étudier la position de la droite Δ avec la droite d de représentation paramétrique :

1) $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 7 - 6t \\ z = -3 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 - t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ 3) $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 7 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Partie 3 :

On donne les droites d et d' de représentations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = 6 - 3s \\ y = -7 + 2s \\ z = -1 + s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -3 \\ z = -5 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Démontrer que ces droites sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 5 (Position relative de plans et de droites) :

Partie 1 :

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace soit (d) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -7+t \\ y = 4+2t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = -5-t \end{cases}$$

et le plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne :

$$-2x-3y+z-6=0.$$

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de $(\mathscr{P})$.

Partie 2 :

Déterminer les positions relatives des droites et plans suivants. Si la droite et le plan sont sécants, déterminer les coordonnées du point d'intersection et préciser si la droite est orthogonale au plan.

1) $(d): \begin{cases} x = -1+3t \\ y = 2-5t \\ z = t \end{cases}$ et $(P): 3x-2y+5z-1=0$

2) $(d): \begin{cases} x = 2+6t \\ y = 3-t \\ z = 12 \end{cases}$ et $(P): x+6y+3z-7=0$

Exercice 5 (Synthèse) :

Partie 1

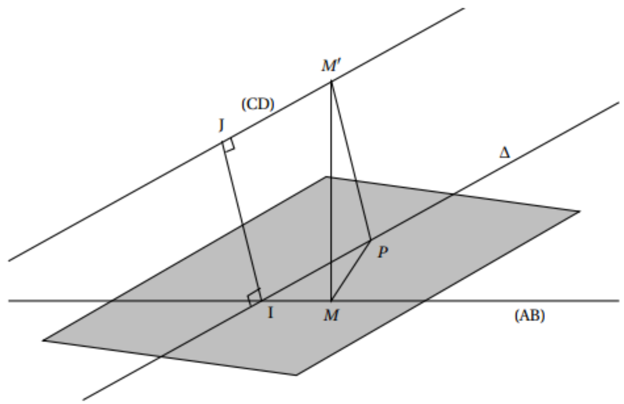
On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives :
$(4;1;5)$, $(-3;2;0)$, $(1;3;6)$, $(-7;0;4)$.

1) Démontrer que les points A, B, C définissent un plan $\mathscr{P}$ et que ce plan a pour équation cartésienne $x+2y-z-1=0$.
2) Le but de cette question est de calculer la distance d du point F au plan $\mathscr{P}$.
   On appelle Δ la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.
   a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   b) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point F sur le plan $\mathscr{P}$.
   c) Déterminer d

Partie 2

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A.
On considère les points B$(10;-8;2)$, C$(-1;-8;5)$ et D$(14;4;8)$.

1. **a.** Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD).
   b. Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.
2. On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4.
   a. Déterminer les coordonnées des points I et J et en déduire la distance IJ.
   b. Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).
   La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).
3. Cette question a pour but de vérifier que la distance IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).
   Sur le schéma ci -dessous on a représenté les droites (AB) et (CD), les points I et J, et la droite Δ parallèle à la droite (CD) passant par I.
   On considère un point M de la droite (AB) distinct du point I.
   On considère un point M' de la droite (CD) distinct du point J.



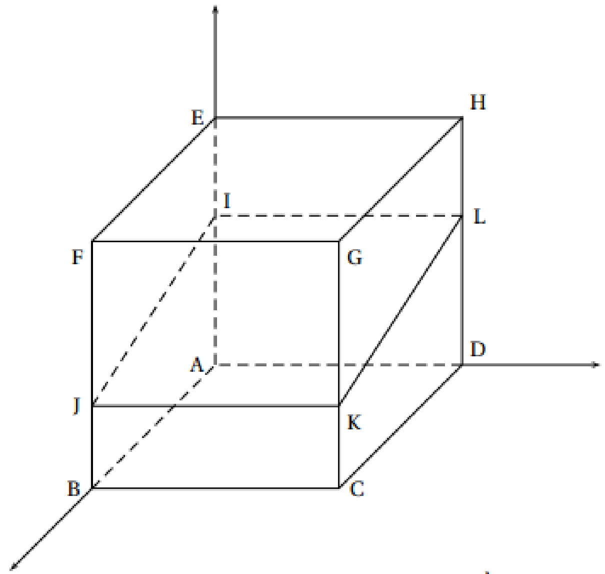
a. Justifier que la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M' coupe la droite Δ en un point que l'on notera P.

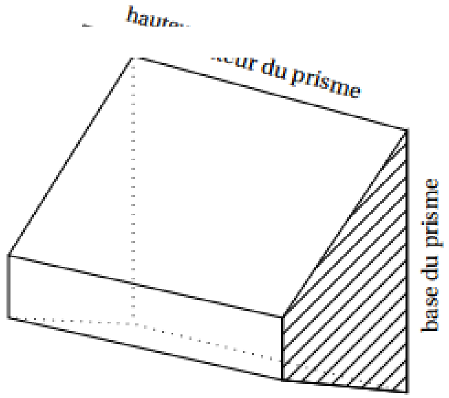
b. Démontrer que le triangle MPM' est rectangle en P.

c. Justifier que $MM' > IJ$ et conclure.

Partie 3

On considère un cube ABCDEFGH. L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
La figure est donnée ci-dessous.





On rappelle les formules suivantes :

Aire d'un trapèze : $\frac{1}{2}$(petite base + grande base) × hauteur
Volume d'un prisme : aire de la base × hauteur

On note $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $4x + 15z - 9 = 0$.
La section IJKL du cube ABCDEFGH par le plan $\mathscr{P}_1$ est représentée sur la figure.

1. Déterminer les coordonnées des points I et J.
2. Le plan $\mathscr{P}_1$ partage le cube en deux prismes.
   Calculer le volume de chacun de ces deux prismes.
3. Soit M un point du segment [EI].
   On cherche un plan $\mathscr{P}_2$ parallèle à $\mathscr{P}_1$ et passant par M qui partage le cube en deux prismes de même volume.
   Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}_2$.

Partie 4

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points : A(0 ; 0 ; 2), B(0 ; 4 ; 0) et C(2 ; 0 ; 0).

1. **a.** Vérifier qu'une équation du plan (ABC) est : $2x + y + 2z = 4$.
   b. Calculer la distance du point O au plan (ABC).
2. **a.** Déterminer une équation du plan P passant par A et orthogonal à la droite (BC).
   b. Soit Δ la droite intersection du plan P et du plan (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ. Quel rôle joue cette droite dans le triangle ABC ?
3. **a.** Soit Δ' la médiane issue de B du triangle ABC.
   Montrer qu'une équation paramétrique de Δ' dans le triangle ABC est :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 4-4t, \\ z & = & t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$
   b. Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle.
4. Soit H le point d'intersection des droites Δ et Δ'. Montrer que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9}\,;\,\frac{4}{9}\,;\,\frac{8}{9}\right)$.
   Que représente le point H pour le triangle ABC ?
5. Montrer que le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC). Retrouver alors la distance du point O au plan (ABC).

Partie 5

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives (4 ; 1 ; 5), (−3 ; 2 ; 0), (1 ; 3 ; 6), (−7 ; 0 ; 4).

1. **a.** Démontrer que les points A, B, C définissent un plan $\mathscr{P}$ et que ce plan a pour équation cartésienne $x + 2y - z - 1 = 0$.
   b. Déterminer la distance d du point F au plan $\mathscr{P}$.
2. Le but de cette question est de calculer la distance d par une autre méthode.
   On appelle Δ la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point F sur le plan $\mathscr{P}$.
   c. Retrouver le résultat de la question 1. b.

Partie 6

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x + y - 1 = 0$ et par $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $y + z - 2 = 0$.
   Justifier que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants et vérifier que leur intersection est la droite $\mathscr{D}$, dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{l} x = 1-t \\ y = t \\ z = 2-t \end{array}\right.$, où t désigne un nombre réel.
2. **a.** Déterminer une équation du plan $\mathscr{R}$ passant par le point O et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$.
   b. Démontrer que le point I, intersection du plan $\mathscr{R}$ et de la droite $\mathscr{D}$, a pour coordonnées (0 ; 1 ; 1).

3. Soient A et B les points de coordonnées respectives $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et $(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

a. Vérifier que les points A et B appartiennent au plan $\mathscr{R}$.

b. On appelle A′ et B′ les points symétriques respectifs des points A et B par rapport au point I.
Justifier que le quadrilatère ABA′ B′ est un losange.

c. Vérifier que le point S de coordonnées $(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.

d. Calculer le volume de la pyramide SABA′B′.

On rappelle que le volume V d'une pyramide de base d'aire b et de hauteur h est : $V = \frac{1}{3} b \times h$.

Partie 7

On considère le cube OABCDEFG d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.
Il n'est pas demandé de rendre le graphique complété avec la copie.
Soient les points P et Q tels que $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OQ} = 4\overrightarrow{OC}$.
On appelle R le barycentre des points pondérés $(B, -1)$ et $(F,\ 2)$.
L'espace est muni du repère orthonormal $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OD}\right)$.

1. **a.** Démontrer que le point R a pour coordonnées $(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$.

b. Démontrer que les points P, Q et R ne sont pas alignés.

c. Quelle est la nature du triangle PQR ?

2. **a.** Démontrer qu'une équation du plan (PQR) est $4x + 2y + z - 8 = 0$.

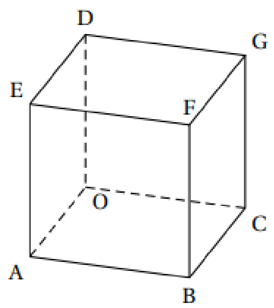
b. Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (PQR).

3. On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (PQR).

a. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (DH).

b. Déterminer les coordonnées du point H.

c. Démontrer que le point H appartient à la droite (PR).



Exercice 7 (Vrai/faux) :

Affirmation 1 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points $A(12\ ;7\ ;-13)$ et $B(3\ ;\ 1\ ;\ 2)$ ainsi que le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3x + 2y - 5z = 1$.

Affirmation : le point B est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 2 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4+t \\ y &=& 6+2t \\ z &=& 4-t \end{array}\right. ,\quad t \in R, \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 8+5t' \\ y &=& 2-2t' \\ z &=& 6+t' \end{array}\right. ,\quad t' \in R.$$

Affirmation : les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont coplanaires.

Affirmation 3 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. On considère le point A de coordonnées $(-1\ ;\ -1\ ;\ 1)$ et les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques :

$$\mathscr{D} \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t-1 \\ y &=& -3t+2 \\ z &=& t \end{array}\right. \text{où } t \in \mathbb{R} \qquad \mathscr{D}' \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3t' \\ y &=& t'+2 \\ z &=& 3t'-2 \end{array}\right. \text{où } t' \in \mathbb{R}$$

Proposition 1 : « Le point A appartient à la droite $\mathscr{D}$ ».
Proposition 2 : « Le plan perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$ passant par le point O a pour équation : $2x - 3y + z = 0$ ».
Proposition 3 : « Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales ».
Proposition 4 : « Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires ».
Proposition 5 : « La distance du point A au plan d'équation $2x - 3y + z = 0$ est $\frac{\sqrt{14}}{7}$.

Affirmation 4 :

$\mathscr{P} : x - y - z - 2 = 0$

– la droite $\mathscr{D}$ ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -3-2t \\ y &=& 2t \\ z &=& 1+2t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1

La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 5 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère le point A de coordonnées $(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$ et la droite $(\mathscr{D})$ de représentation paramétrique :

$$(\mathscr{D}) \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+4t \\ y &=& -2+2t \\ z &=& 3-2t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Affirmation :
Le plan $(\mathscr{P})$ contenant le point A et orthogonal à la droite $(\mathscr{D})$ a pour équation : $2x + y - z = 0$.

Affirmation 6 :

1. La droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t+2 \\ y = -2t \\ z = 3t-1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est : $x+2y+z-3=0$.

Affirmation 7 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on donne les points :

A(1 ; 2 ; 3), B(3 ; 0 ; 1), C(−1 ; 0 ; 1), D(2 ; 1 ; −1), E(−1 ; −2 ; 3) et F(−2 ; −3, 4).

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}$ (0 ; 1 ; −1) est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Affirmation 8 :

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x-y+3z+1=0$
et la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = -5+3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

On donne les points $A(1\,;\,1;\,0)$, $B(3\,;0\,;\,-1)$ et $C(7\,;1\,;\,-2)$

Proposition 1 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5-2t \\ y = -1+t \\ z = -2+t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

Proposition 2 :
Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3 :
Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4 :
La droite $\mathscr{D}$ coupe le plan $\mathscr{P}$ au point E de coordonnées $(8;\,-3;\,-4)$.

Proposition 5 :
Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles.

Exercice 8 (QCM) :

Partie 1 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère la droite (D) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-3t \\ z = 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$, et le plan (P) d'équation cartésienne $x+y+z-3=0$.

On peut affirmer que :

Réponse A : la droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.
Réponse B : la droite (D) est incluse dans le plan (P).
Réponse C : la droite (D) et le plan (P) se coupent au point de coordonnées (4 ; −5 ; 4).
Réponse D : la droite (D) et le plan (P) sont orthogonaux.

Partie 2 :

On désigne par P le plan d'équation cartésienne $2x-y+3z=0$ et par A et B les deux points du plan P de coordonnées respectives (1 ; 2 ; 0) et (0 ; 3 ; 1).

1. Soient C, D, E les points de coordonnées respectives (1 ; 1 ; −1), (−1 ; 4 ; 2), (1 ; 5 ; 1).
   a. Les points A, B, C définissent le plan P.
   b. Les points A, B, D définissent le plan P.
   c. Les points A, B, E définissent le plan P.

Partie 3 :

Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = -1+t \\ z = 2-3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 2+t \\ y = -2-t \\ z = 4+2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ sont :}$$

Réponse A : parallèles et distinctes — Réponse B : confondues
Réponse C : sécantes — Réponse D : non coplanaires

Partie 4 :

Le projeté orthogonal du point B(1 ; 6 ; 0) sur le plan d'équation $-x+3y-z+5=0$ a pour coordonnées :

Réponse A : (3 ; 1 ; 5) — Réponse B : (2 ; 3 ; 1)
Réponse C : (3 ; 0 ; 2) — Réponse D : (−2;3;−6)

Exercice 9 (Approfondissements) :

Partie 1 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations cartésiennes respectives :

$$x+y+2z-3=0 \quad \text{et} \quad -x+4y-5z+6=0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.

Partie 2 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les trois points $A(-1;-1;1)$, $B(1;2;-1)$ et $C(0;1;1)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) s'il existe.

Partie 3 :

L'objectif de cet exercice est de déterminer les position relative de différents objets de l'espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

On considère les points A(1 ; 1 ; 4) ; B(4 ; 2 ; 5) ; C(3 ; 0 ; −2) et J(1 ; 4 ; 2).

On note :
- $\mathscr{P}$ le plan passant par les points A, B et C ;
- $\mathscr{D}$ la droite passant par le point J et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

1. Position relative de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{D}$

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{P}$.

b. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

c. Montrer que $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$.

On rappelle que, un point I et un nombre réel strictement positif r étant donnés, la sphère de centre I et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\mathrm{I}M = r$.

On considère le point I (1 ; 9 ; 0) et on appelle $\mathscr{S}$ la sphère de centre I et de rayon 6.

2. Position relative de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{S}$

a. Montrer que la droite Δ passant par I et orthogonale au plan $\mathscr{P}$ coupe ce plan $\mathscr{P}$ au point H(3 ; 1 ; 2).

b. Calculer la distance IH.

On admet que pour tout point M du plan $\mathscr{P}$ on a $\mathrm{I}M \geqslant \mathrm{IH}$.

c. Le plan $\mathscr{P}$ coupe-t-il la sphère $\mathscr{S}$? Justifier la réponse

3. Position relative de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{S}$

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

b. Montrer qu'un point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à la sphère $\mathscr{S}$ si et seulement si :

$$(x-1)^2+(y-9)^2+z^2=36.$$

c. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ coupe la sphère en deux points distincts.

On ne cherchera pas à déterminer les coordonnées de ses points.