METHODES A CONNAITRE – REPRESENTATIONS PARAMETRIQUES EQUATIONS CARTESIENNES

Problème A : Déterminer l'équation paramétrique d'une droite (d).
Questions-types : Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB).
Procédure : Il faut toujours connaître un point de la droite et un vecteur directeur (qui peut être le vecteur directeur d'une droite parallèle à (d), le vecteur normal d'un plan orthogonal à (d) , etc…) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur directeur et $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ un point de (d) L'équation de (D) est : $\begin{cases} \boldsymbol{x = at + x_A} \\ \boldsymbol{y = bt + y_A} \\ \boldsymbol{z = ct + z_A} \end{cases}$ avec t un réel Si, on cherche les coordonnées de (AB), alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB)
Exemples : Déterminer une équation de la droite (AB) avec A(2 ; 3 ;1) et B(3 ; 4 ;-2)
A vous de jouer : Déterminer une équation de la droite (AB) avec A(-2 ; 1 ;5) et B(-3 ; 1 ;2)
Problème B : Déterminer l'équation cartésienne d'un plan P
Questions-types : Déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC)
Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal et $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ un point du plan (P) L'équation de (P) est : $ax + by + cz + d = 0$ $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$ Pour trouver les coordonnées d'un vecteur normal, on pose $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ on fixe une des coordonnées du vecteur et avec deux vecteurs non-colinéaires du plan $\vec{u}$et $\vec{v}$ on cherche a et b tels que $\vec{u}.\vec{n} = 0$ et $\vec{v}.\vec{n} = 0$
Exemples : Soient les points A(1 ;1 ;-2) et B(2 ; 0 ;0) et C(4 ;1 ;1). Sachant que $\vec{n}(1\ ; -1; -1)$ est normal au plan (ABC), déterminer une équation cartésienne de (ABC)
A vous de jouer : Soient les points A(4 ;1 ;5) et B(-3 ; 2 ;0) et C(1 ;3 ;6). Sachant que $\vec{n}(1\ ; 2; -1)$ est normal au plan (ABC), déterminer une équation cartésienne de (ABC)
Problème C : Déterminer des coordonnées de projetés orthogonaux
Questions-types : Déterminer les coordonnées du projeté du point A sur la droite (ou le plan) (d)
Procédure : Projeté orthogonal H$(x_H\ ;\ y_H\ ;\ z_H)$ d'un point $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ sur une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et d'équation $\begin{cases} \boldsymbol{x = at + x_A} \\ \boldsymbol{y = bt + y_A} \\ \boldsymbol{z = ct + z_A} \end{cases}$ Les coordonnées de H doivent vérifier le système : - $\overrightarrow{BH}.\vec{u} = 0$ soit $a(x_H - x_B) + b(y_H - y_B) + c(z_H - z_B) = 0$ (1) - H appartient à la droite soit $\begin{cases} \boldsymbol{x_H = at + x_A} \\ \boldsymbol{y_H = bt + y_A} \\ \boldsymbol{z_H = ct + z_A} \end{cases}$ **(2)** On résout le système en injectant les coordonnées de H (2) dans le calcul du produit scalaire (1) afin de déterminer t puis d'en déduire les coordonnées de H.

Projeté orthogonal H$(x_H\ ;\ y_H\ ;\ z_H)$ d'un point $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ sur un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et d'équation $ax+by+cz+d=0$

Les coordonnées de H doivent vérifier le système :

- $\overrightarrow{BH}=k\vec{n}$ soit $\begin{cases}\boldsymbol{x_H-x_B=ak}\\ \boldsymbol{y_H-x_B=bk}\\ \boldsymbol{z_H-x_B=ck}\end{cases}$ (1)
- H appartient au plan soit $ax_H+by_H+cz_H+d=0$ **(2)**

On résout le système en injectant les coordonnées de H (1) dans l'équation (2) afin de déterminer k puis d'en déduire les coordonnées de H.

<u>Exemples :</u>Soit le points A(1 ;1 ;-2).

Déterminer les coordonnées du projeté H de A sur la droite (d) d'équation $\begin{cases}\boldsymbol{x=t+1}\\ \boldsymbol{y=3t-2}\\ \boldsymbol{z=-t+3}\end{cases}$

Déterminer les coordonnées du projeté K de A sur le plan (P) d'équation $x-y+2z-4=0$

<u>A vous de jouer :</u>Soit le points A(3 ;4 ;-1).

Déterminer les coordonnées du projeté H de A sur la droite (d) d'équation $\begin{cases}\boldsymbol{x=2t}\\ \boldsymbol{y=4t-4}\\ \boldsymbol{z=-5t+1}\end{cases}$

Déterminer les coordonnées du projeté K de A sur le plan (P) d'équation $2x+3y+7z-1=0$

Problème D : Etudier la position relative de deux droites (parallèles, coplanaires, etc…)

<u>*Questions-types :*</u>*Déterminer un vecteur directeur de (d)*

<u>Procédure :</u>

Soient deux droites (D) d'équation $\begin{cases}x=at+x_A\\ y=bt+y_A\\ z=ct+z_A\end{cases}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$un vecteur directeur

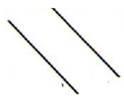
(D') d'équation $\begin{cases}x'=a't'+x_{A'}\\ y'=b't'+y_{A'}\\ z'=c't'+z_{A'}\end{cases}et\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ un vecteur directeur

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ Colinéaires ?
$\vec{u}=k\vec{v}$?

Oui

Résoudre le système : $\begin{cases}a't'+x_{A'}=at+x_A\\ b't'+y_{A'}=bt+y_A\\ c't'+z_{A'}=ct+z_A\end{cases}$

0 solution → (D) et (D') sont parallèles →

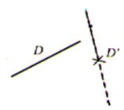


Infinité de solution → (D) et (D') sont confondues →

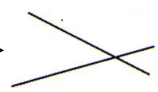
Non

Résoudre le système : $\begin{cases}a't'+x_{A'}=at+x_A\\ b't'+y_{A'}=bt+y_A\\ c't'+z_{A'}=ct+z_A\end{cases}$

0 solution → (D) et (D') sont non coplanaires →



1 solution → (D) et (D') se coupent →



Si $\vec{u}.\vec{v}=0$ alors (D) et (D') orthogonales (et perpendiculaires si (D) et (D') coplanaires)

Exemples :Etudier la position relative des droites (d) et (d’) définies respectivement par les équations paramétriques : $\begin{cases} x = 3t + 5 \\ y = t + 2 \\ z = -4t + 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 2t' + 5 \\ y = -2t' + 2 \\ z = t' + 4 \end{cases}$ avec t et t’ des réels

A vous de jouer :Etudier la position relative des droites (d) et (d’) définies respectivement par les équations paramétriques : $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = t + 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = t' + 3 \\ y = -3t' + 1 \\ z = 2t' + 4 \end{cases}$

Problème E : Etudier la position relative entre un plan et une droite.

Questions-types :La droite (AB) et le plan (P) sont-ils sécants ?

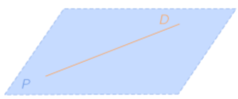
Soient un plan (P) d’équation $ax + by + cz + d = 0$ et $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal et (D) d’équation $\begin{cases} x' = a't + x_A \\ y' = b't + y_A \\ z' = c't + z_A \end{cases}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ un vecteur directeur

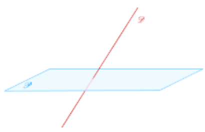
Injecter l’équation de (D) dans (P) : $a(a't + x_A) + b(b't + x_A) + c(c't + x_A) + d = 0$?

Toujours vraie → (D) inclus dans (P)

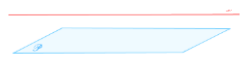
Vraie pour une valeur de t → (D) et (P) sécants

Toujours Faux → (D) et (P) parallèles





Si $\vec{n} = k\vec{v}$ alors (D) et (P) Orthogonaux



Dans le cas où, la droite coupe le plan, les coordonnées du point d’intersection sont les solutions du système. On remplace t par sa valeur, trouvée précédemment, dans l’équation de la droite.

Exemples :Déterminer l’intersection entre le plan P d’équation $2x - y + 3z + 10 = 0$ et la droite (d) d’équation : $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -3t \\ z = 5 \end{cases}$

A vous de jouer :Déterminer l’intersection entre le plan P d’équation $x - y + 3z + 4 = 0$ et la droite (d) d’équation : $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases}$