

SOMMES DE VARIABLES ALEATOIRES – COURS

Loi de couples : Soient X et Y deux variables aléatoires. Le couple (X, Y), pour tout nombre réel k et l, a pour loi :

$$p(X = k ; Y = l) = p(\{X = k\} \cap \{Y = l\})$$

Si X et Y sont **indépendantes** alors on a :

$$p(X = k ; Y = l) = p(X = k) \times p(Y = l)$$

Sommes de variables aléatoires indépendantes :

La loi de la variable X + Y s'obtient à partir des lois de X et de Y soit :

$$p(X + Y = s) = \sum p(X = k) \times p(Y = l)$$

Avec k et l vérifiant k + l = s

Propriétés de l'espérance :

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(X + b) = E(X) + b$
- $E(a \times X) = a \times E(X)$

Propriétés de la variance :

- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
- $V(a \times X) = a^2 \times V(X)$

Echantillon de taille n d'une loi de probabilité :

Soit n variables aléatoires indépendantes $\{X_1; X_2; \dots; X_n\}$ suivant une même loi. On considère les variables :

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$M_n = \frac{S_n}{n}$$

Espérance de S_n : $E(S_n) = n \times E(X_1)$

Variance de S_n : $V(S_n) = n \times V(X_1)$

Espérance de M_n : $E(M_n) = E(X_1)$

Variance de M_n : $V(M_n) = V(X_1)$

Application à la loi Binomiale :

Retrouver les résultats de la loi Binomiale :

Soit n variables aléatoires indépendantes $\{X_1; X_2; \dots; X_n\}$ suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p. La variable S_n suit donc une loi binomiale de paramètres n et p.

On a donc $E(S_n) = n \times p$ et $V(S_n) = np(1 - p)$

Deux lois binomiales :

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires suivant respectivement une loi $\mathcal{B}(n; p)$ et $\mathcal{B}(m; p)$ alors $X_1 + X_2$ suit une loi $\mathcal{B}(n + m; p)$

Démonstration : Espérance et variance de la loi binomiale

Approfondissements :

Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X) \times E(Y)$

$$\text{Et } V\left(\frac{X}{Y}\right) = E\left(\frac{X^2}{Y^2}\right) - \left[E\left(\frac{X}{Y}\right)\right]^2$$

Méthodes (exercices) :

	<u>Hachette</u>	<u>Hatier</u>	<u>Mes exos</u>	<u>Sesamaths</u>
A) Modéliser par une sommes de variables	1-11	30-31,41-56	Ex. 1	82
B) Calculer des indicateurs	1-11	34-35,68-88	Ex. 2	83

Exercices de synthèse :

	<u>Hachette</u>	<u>Hatier</u>	<u>Mes exos</u>	<u>Sesamaths</u>
Synthèse	53-55,38	98-102,111-112,93-97	Ex. 3	84
Vrai/faux		57,89		
QCM				
Approfondissements			Ex. 4	85
Prise d'initiative				
Algorithmes		58-67,90,91		

