SOMMES DE VARIABLES ALEATOIRES – EXERCICES

Exercice 1 (modéliser une somme) :

Partie 1 :

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un univers Ω dont on donne les lois de probabilité ci-dessous.

x_i	-4	1	20
$P(X = x_i)$	$0,1$	$0,35$	$0,55$

y_i	-2	5
$P(Y = y_i)$	$0,27$	$0,73$

1. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X + Y$. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Z ?
2. Peut-on déterminer la loi de probabilité de Z à partir des données de l'énoncé ? Si oui, donner cette loi.

Partie 2 :

Lors de l'inscription à un club de fitness, les clients paient différents droits d'inscription selon leur tranche d'âge : les adhérents de moins de 20 ans paient mensuellement 15 €, les adhérents de plus de 62 ans paient 10 € et les autres paient 30 €.
Par ailleurs, il est possible de souscrire une extension d'abonnement qui revient à 5 € supplémentaires pour les boissons à volonté, 15 € supplémentaires pour l'utilisation des appareils de type Sismo et 17 € pour l'inscription aux deux suppléments à la fois.
On choisit au hasard un client du club de sport et on note X la variable aléatoire correspondant au prix total de son abonnement.

1. Proposer une décomposition de X en somme de variables aléatoires dont on donnera une interprétation.
2. Expliciter l'ensemble des valeurs prises par ces variables aléatoires.

Partie 3 :

Dans une fête foraine, le gain d'un des jeux présentés est modélisé par la variable aléatoire X.

Afin de fêter le 5^e anniversaire de ce stand, tous les gains sont doublés.
On note Y la variable aléatoire correspondant au nouveau gain possible.
Exprimer Y en fonction de X.

Exercice 2 (Calculs d'indicateurs) :

Partie 1 :

Soient X et Y deux variables aléatoires dont on donne les lois de probabilité ci-dessous.

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$0,12$	$0,54$	$0,34$

y_i	5	10	15
$P(Y = y_i)$	$0,2$	$0,4$	$0,4$

1. Calculer $E(X + 3Y)$.
2. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes. Calculer $V(X + 3Y)$ et en déduire une valeur approchée de $\sigma(X + 3Y)$ au centième.

Partie 2 :

On considère quatre variables aléatoires identiquement distribuées (de même loi de probabilité) et indépendantes X_1, X_2, X_3 et X_4.

On donne la loi de probabilité de X_1.

x_i	-4	1	5	10
$P(X = x_i)$	$0,25$	$0,15$	$0,2$	$0,4$

On pose enfin $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$. En utilisant éventuellement une calculatrice, déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
On arrondira σ à 10^{-2}.

Partie 3 :

On reprend les conditions de l'exercice précédent. On pose $Y = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}$

Déterminer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$. On arrondira $\sigma(Y)$ au millième.

Partie 4 :

On considère un nombre réel a et deux vriables aléatoires X et Y définies sur Ω dont on donne les lois de probabilité.

x_i	-7	a	2
$P(X = x_i)$	$0,24$	$0,37$	$0,39$

y_i	-2	4	5	8
$P(Y = y_i)$	$0,15$	$0,47$	$0,13$	$0,25$

On donne par ailleurs $E(2X + 5Y) = 20,29$. Déterminer la valeur de a.

Exercice 3 (Synthèse) :

Partie 1 :

Le cinéma de la commune propose différents tarifs : un tarif plein à 12 €, un tarif étudiant à 7 € et un tarif enfant (−12-ans) à 5 €.
Une étude portant sur la clientèle a montré que 48 % des clients paient un tarif plein, 22 % des clients bénéficient du tarif enfant et les autres du tarif étudiant.
Par ailleurs, sur l'ensemble des clients, 12 % achètent uniquement un paquet de bonbons à 4 €, 23 % achètent seulement un paquet de pop-corn taille standard à 5 €, 15 % achètent uniquement un paquet de pop-corn en grande taille à 7 €. Les autres clients ne souhaitent pas payer de confiserie.
On choisit au hasard un client du cinéma et on appelle respectivement X_1 et X_2 les variables aléatoires correspondant au prix payé par ce client pour la place de cinéma et pour l'éventuelle confiserie supplémentaire.

1. Déterminer les lois de probabilité de X_1 et de X_2
2. Soit X la variable aléatoire correspondant au prix total payé par le client.

a. Exprimer X en fonction de X_1 et de X_2.

b. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat obtenu.

Partie 2 :

À la fin de l'année civile, la gérante d'un garage automobile spécialisé s'intéresse au prix payé par ses clients pour les pneus (par deux) et les plaquettes de frein.
Elle remarque, pour les plaquettes de frein, que :

- 12 % des clients paient 70 € ;
- 47 % des clients paient 90 € ;
- 40 % des clients paient 120 € ;
- 1 % des clients paient 160 €.

Pour les deux pneus, elle a établi que :

- 45 % des clients paient 100 € ;
- 40 % des clients paient 150 € ;
- 15 % des clients paient 200 €.

On note X la variable aléatoire correspondant au prix payé pour le changement des plaquettes de frein, et Y la variable aléatoire correspondant au prix payé pour le changement des deux pneus.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, puis celle de la variable aléatoire Y.

2. a. Soit Z_1 la variable aléatoire correspondant au prix payé par un client changeant à la fois deux pneus et ses plaquettes de frein. Exprimer la variable aléatoire Z_1 en fonction des variables aléatoires X et Y.

b. À quel prix moyen le changement de deux pneus et des plaquettes de frein s'élève-t-il ?

3. Certains clients souhaitent changer leurs plaquettes de frein et les quatre pneus, tous identiques. Soit Z_1 la variable aléatoire correspondant au prix alors payé.
Exprimer la variable aléatoire Z_2 en fonction de X et Y puis déterminer $E(Z_2)$. Interpréter le résultat obtenu.

Partie 3 :

Un restaurant propose différents choix de menus.

- 64 % des clients ne souhaitent pas manger d'entrée, alors que 22 % des clients choisissent l'entrée à 9 €. Les autres choisissent l'entrée à 11 €.
- 76 % des clients commandent le plat composé de viande dont le prix s'élève à 19 €. Les autres choisissent le plat de poisson coûtant 22 €.
- Enfin, 10 % des clients mangent une crêpe en dessert à 8 €, 38 % des clients désirent manger le dessert au chocolat à 6 €, 30 % commandent le dessert aux fruits à 7 € et 22 % ne souhaitent pas manger de dessert.

On choisit un client du restaurant au hasard.
On note respectivement X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires correspondant aux prix payés pour l'entrée, pour le plat et pour le dessert.

1. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_1, X_2 et X_3.

2. On note X la variable aléatoire correspondant au prix total payé par le client. Exprimer X en fonction de X_1, X_2 et X_3.

3. En déduire le prix moyen payé par chaque client.

4. On choisit maintenant dix clients de ce restaurant.
On suppose que le nombre de clients du restaurant est suffisament important pour assimiler cette expérience à un tirage avec remise.
En moyenne, sur ces dix clients, à combien le prix total s'élève-t-il ?

Partie 4 :

Deux lycées sont situés dans la même commune. Le premier lycée, noté lycée A, réalise de très bons résultats aux examens : 75 % des élèves de l'établissement obtiennent le bac avec mention. Dans le lycée B, seulement 55 % des élèves l'obtiennent avec mention.
On choisit 12 élèves du lycée A et 20 élèves du lycée B. Le nombre d'élèves de chaque lycée permet d'assimiler ces expériences à deux tirages avec remise.
On note respectivement X et Y les variables aléatoires comptant le nombre d'élèves ayant obtenu une mention parmi les élèves du lycée A et du lycée B choisis.

1. Justifier que X et Y suivent deux lois binomiales dont on précisera les paramètres.

2. Soit Z la variable aléatoire comptant le nombre d'élèves ayant obtenu une mention parmi tous ceux interrogés.

a. Exprimer Z en fonction de X et Y.

b. Calculer et interpréter $E(Z)$.

c. Calculer $V(Z)$ et en déduire une valeur approchée de $\sigma(Z)$ à 0,001 près.

Exercice 4 (Approfondissements) :

Partie 1 :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un univers Ω.
On souhaite montrer que $E(XY) = E(X)E(Y)$.

› Notations et questions préliminaires :

Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X \times Y$.
On notera dans la suite $\mathrm{Val}_x = \{x_1 ; \ldots ; x_r\}$ l'ensemble des valeurs prises par X, $\mathrm{Val}_Y = \{y_1 ; \ldots ; y_s\}$ l'ensemble des valeurs prises par Y et Val_z l'ensemble des valeurs prises par Z.
Attention, pour $z \in \mathrm{Val}_z$, il peut exister plusieurs couples $(x; y)$ tels que $z = x \times y$.
On va donc regrouper ces différents couples dans un ensemble qu'on notera A_z : pour tout $z \in \mathrm{Val}_Z$, on pose $A_z = \{(x ; y) \in \mathrm{Val}_X \times \mathrm{Val}_Y \text{ tels que } x \times y = z\}$.
A_z est donc l'ensemble des couples de valeurs de X et de Y dont le produit vaut z.

1. Justifier que les ensembles A_z sont des ensembles deux à deux disjoints.

2. À quoi la réunion de tous les ensembles A_z tels que $z \in \mathrm{Val}_z$ correspond-elle ?

3. Démontrer que pour tout $z \in \mathrm{Val}_z$, $P(Z = z) = \sum_{(x;y)\in A_z} P((X = x) \cap (Y = y))$.

4. Montrer que $E(Z) = \sum_{z\in \mathrm{Val}_Z} \sum_{(x;y)\in A_z} xyP(X = x)P(Y = y)$.

5. En déduire que $E(Z) = E(X)E(Y)$.

On rappelle la formule de König-Huygens : pour toute variable aléatoire X définie sur un univers Ω, $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X + Y$.
Appliquer la relation ci-dessus à la variable aléatoire Z.

Partie 2 :

On rappelle la formule de König-Huygens : pour toute variable aléatoire X définie sur un univers Ω, $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X + Y$.
Appliquer la relation ci-dessus à la variable aléatoire Z.

2. En déduire que $V(X + Y) = E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + 2E(XY) - 2E(X)E(Y)$.

, en déduire que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.