METHODES A CONNAITRE – VECTEURS DROITES ET PLANS

Problème A : Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs/placement de point

<u>Questions-types :</u> *- Tracer un représentant du vecteur $\vec{u}$*

- *Placer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$*

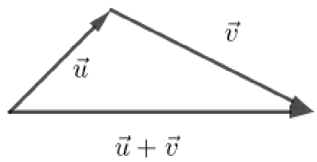
<u>Procédure :</u>

<u>Tracer une représentation de combinaisons linéaires</u>

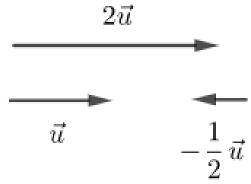
<u>Sans coordonnées $\vec{u}$</u>

1) Isoler le vecteur $\vec{u}$ dans l'égalité le définissant.
2) Prendre un point de départ quelconque sur la figure.
3) A partir de ce point, tracer la translation correspondant au premier vecteur de l'égalité du (1). Il faut reporter le vecteur au niveau de ce point.
4) Le point d'arrivée du premier vecteur correspond au point de départ de la seconde translation (si elle existe). A recommencer autant de fois que nécessaire en utilisant les règles :

$\vec{u} + \vec{v}$



$k \times \vec{u} + \vec{v}$ (attention multiplier par un nombre peut changer sens et norme)



<u>Avec coordonnées :</u> $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans une base (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

1) On prend une origine arbitraire.
2) On reporte x fois le vecteur $\vec{i}$ et y fois le vecteur $\vec{j}$ et z fois le vecteur $\vec{k}$

<u>Placer un point défini par une égalité vectorielle</u>

<u>Sans coordonnées $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{2u} + \vec{v}$ (placer A)</u>

1) Transformer l'égalité vectorielle de façon à obtenir un seul vecteur contenant le point A à gauche de l'égalité (comme point d'arrivée). On pourra utiliser la relation de Chasles, les règles d'algèbre, des symétries…
2) Prendre le point B comme point de départ.
3) A partir de ce point, tracer la translation correspondant au premier vecteur de l'égalité du (1)
4) Le point d'arrivée du premier vecteur correspond au point de départ de la seconde translation (si elle existe). A recommencer autant de fois que nécessaire. Le dernier point d'arrivée est le point A.

<u>Avec coordonnées</u> : Trouver les coordonnées de A telles que $\overrightarrow{BA} = \vec{u}$

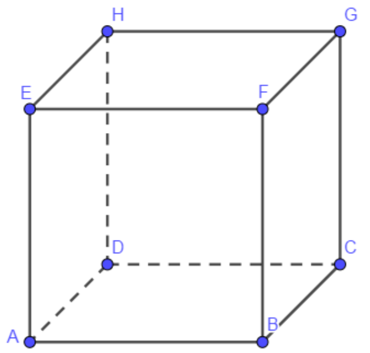
1) Traduire l'énoncé par une égalité vectorielle si nécessaire (Formules du cours : milieu et symétrie centrale => $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, parallélogramme =>$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, autres égalités…)
2) Calculer les coordonnées des vecteurs des deux côtés de l'égalité en posant comme inconnues x_A et y_A les coordonnées de A.
3) Transformer l'égalité des vecteurs en égalité de coordonnées :

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{u} = \overrightarrow{AB} \leftrightarrow x_B - x_A = x$ et $y_B - y_A = y$ et $z_B - z_A = z$

4) Résoudre les deux équations pour trouver x_A et y_A et z_A

<u>Exemples :</u> On se place dans le cube ABCDEFGH

1) Tracer un représentant du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$
2) Placer le point I tel que $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{GH} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DE}$
3) Dans la base (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$) placer le point J tel que J (-2 ; $-\frac{1}{4}$; 1)



A vous de jouer : On se place dans le cube ABCDEFGH

1) Tracer un représentant du vecteu $\vec{v} = 2\overrightarrow{EF} + \frac{5}{7}\overrightarrow{DF}$

2) Placer le point K tel que $\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KE} = \vec{0}$

3) Dans la base (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$) placer le point L tel que L (0 ; 3 ; -2)

Problème B : Montrer une égalité vectorielle

Questions-types : Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d)

Procédure : Démontrer une égalité vectorielle du type $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{GI}$

Sans coordonnées :

1) Faire une figure

2) Au brouillon, traduire toutes les données de l'énoncé en égalités vectorielle. Par exemple ABCD parallélogramme signifie que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; I milieu de [AB] signifie que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, etc…

3) On prend le coté gauche de l'égalité et à l'aide de la relation de Chasles, on introduit les points permettant d'obtenir le coté droit de l'égalité (ici E, F, G et I)

4) A l'aide des relations du 1) on élimine les vecteurs non présents dans le coté gauche de l'égalité, on fait apparaitre des points encore manquants…

5) Si on arrive pas à retrouver le membre de droite, on essaie de partir du coté droit et de retrouver une forme commune aux deux membres. En effet, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DR}$ et $\overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{DR}$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{GI}$

Avec coordonnées :

1) On définit un repère à partir de la figure et on exprime les coordonnées des points à partir de cette figure
2) On calcule les coordonnées du membre de droite et les coordonnées du membre de gauche.
3) Si les coordonnées des deux membres sont égales alors l'égalité est prouvée.

Exemples : 1) Soit ABC un triangle. Soient E, F et H tels $\overrightarrow{EC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CH} = -\frac{9}{7}\overrightarrow{BC}$

Démontrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

2) Soient les points $A(-2; 1)$; $T(1; 6)$; $R(3; 3)$ et $E(0; -2)$ Montrer que $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{ER}$

Soit un triangle ABC. On donne les points D et E définis par :

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Montrer que : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Utiliser la méthode sans coordonnées et la méthode avec.

Problème C : Position relative

<u>Questions-types :</u> *- Montrer que (AB) et (EF) sont parallèles.*

<u>Procédure :</u>

<u>Droites parallèles</u>

Plusieurs techniques sont possibles :

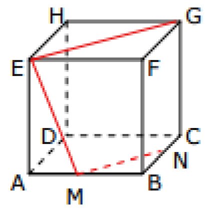
1) On prouve qu'elles sont parallèles à une même troisième droite.
2) On utilise le théorème du toit
3) On utilise le théorème du milieu ou Thalès.
4) On prouve qu'elles sont les droites d'intersection de deux plans parallèles coupés par un troisième plan.
5) On prouve qu'elles sont orthogonales à un même plan ou à des plans parallèles.

Droites sécantes
1) On prouve que les droites ne sont pas parallèles et sont contenues dans un même plan.
2) On détermine le point d'intersection des deux droites.

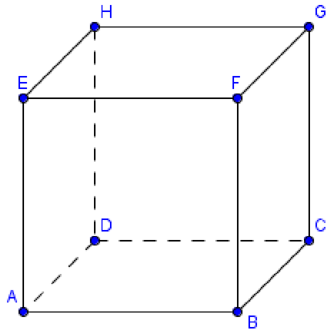
Plans Parallèles
1) On prouve qu'ils ne sont pas sécants en avec un raisonnement par l'absurde.
2) On prouve que l'un contient deux droites sécantes qui sont parallèles à deux droites de l'autre.
3) On prouve qu'ils sont orthogonaux à une même droite ou à deux droites parallèles.

Exemples :

ABCDEFGH est un cube. M est un point de l'arête [AB]. Le plan (GEM) coupe la droite (BC) en N. Montrer que (MN) et (EG) sont parallèles.

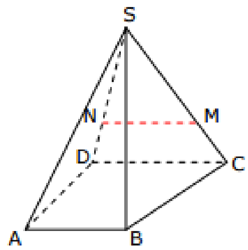


Soient I, J, K et L les milieux respectifs de [AB] ; [DC] ; [AE] et [HD]. Démontrer que les plans (HEB) et (IJK) sont parallèles.



A vous de jouer :

SABCD est une pyramide de sommet S à base trapézoïdale avec (AB)//(CD). M est un point de l'arête [SC]. Le plan (ABM) coupe la droite (SD) en N.
Montrer que (MN)//(DC)



Dans le cube ABCDEFGH, on note I le centre de la face FBCG et J le centre de la face EHDA. Montrer que (HB) et (IJ) sont sécantes.

Problème D : Déterminer la section d'un solide par un plan.

Questions-types : *- Tracer la section du cube par le plan (IJK)*

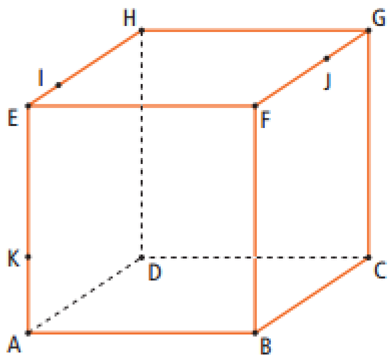
Procédure : L'objectif est de relier les points I, J et K par des segments appartenant aux faces du solide.
- L'intersection, lorsqu'elle existe, d'une face par le plan (IJK) est un segment.
- Une droite doit être tracée dans un plan contenant une face du solide.
- Si deux points du plan (IJK) sont sur une même face, on les relie, cela donne l'intersection de (IJK) et de cette face.
- La section du cube par le plan (IJK) est un polygone.

Pour tracer cette section, on peut :
1) Prolonger une arête du cube et une droite du plan (IJK) qui sont contenues dans une même face. L'intersection des deux droites est un point du plan (IJK) et qui appartient aux deux faces de l'arête prolongée. Lorsque l'on a deux points sur une même face, on les relie.
2) Lorsque deux faces sont parallèles dans une figure, les droites d'intersection de (IJK) et de chacune des faces sont parallèles.

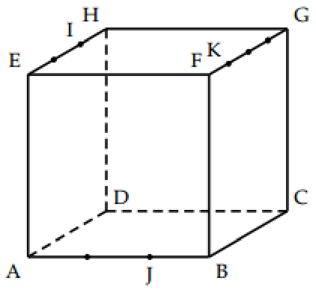
Exemples :

ABCDEFGH est un cube. I, J et K appartiennent respectivement aux segments [GH], [GC] et [AD].

Construire la section du cube par le plan (IJK).



A vous de jouer : Tracer la section du cube par le plan (IJK)



Problème E : **Déterminer si les vecteurs forment une base/lire des coordonnées**

Questions-types : *- Démontrer que* $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ *est une base*

Procédure :

Démontrer qu'un repère est une base :

Montrer qu'il n'existe pas de réels α, β et γ tels que $\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD} = 0$ en résolvant un système.

Lire des coordonnées d'un point E

Déterminer les réels x, y et z tels que $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$ on en déduit que E(x, y, z)

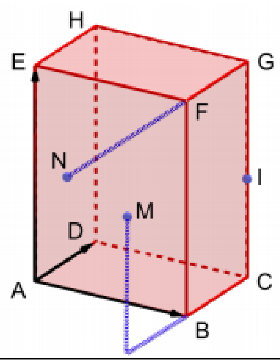
Exemples :

A) Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$ et les points A(1 ; 3 ; 1), B(-2 ; -2 ; 1) et C(5 ; 6 ; 0)

1) Montrer que (A, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) est un repère de l'espace.
2) Déterminer les coordonnées de B et C dans ce repère.

A vous de jouer :

Soit un parallélépipède $ABCDEFGH$.
I est le milieu de $[CG]$.
M et N sont définis par : $\overrightarrow{NF} = 2\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CI}$
1) Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, donner les coordonnées de tous les points de la figure.
2) Placer le point $K(1 ; 3 ; -1)$.



Problème F : Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires, deux droites sont parallèles, trois points sont alignés.

Questions-types : - Démontrer que (AB) et (CD) sont parallèles
- Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

Procédure (pour montrer que des vecteurs sont colinéaires) :

Avec des coordonnées

Pour les vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$, on résout le sytème :

$x = kx'$
$y = ky'$ Si on trouve un unique réel k vérifiant le système, alors les vecteurs sont colinéaires.
$z = kz'$

En utilisant des égalités entre vecteurs :

1) Décomposer $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonctions de deux vecteurs non colinéaires.
2) Prouver que $\vec{u} = k\vec{v}$ avec k un réel.

Prouver que (AB) et (CD) sont parallèles ↔ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Prouver que A, B et C sont alignés ↔ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (équivaut à dire que C appartient à (AB)

Exemples :

A) Les points A(2 ;1 ;3), B(3 ;2 ;2) et C(4 ;3 ;-1) sont-ils alignés ?

B) Soit ABCD un parallélogramme, et I et J des points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Démonter que (IJ) et (AC) sont parallèles.

A vous de jouer :

a) Soit ABCD un quadrilatère et J un point tel que $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$. Démonter que (AD) et (BJ) sont parallèles.

b) Les points A(2 ; 5 ;1) ; B(-2 ; 1 ; 3) et C(-2 ; -3 ;-2) sont-il alignés ?

Problème G : Démontrer que trois vecteurs sont coplanaires.

Questions-types : Démontrer que $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont coplanaires.

Procédure : Soient les vecteurs $\vec{u}(x\,;y\,;z)$; $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$ et $\vec{w}(x''\,;y''\,;z'')$

Les vecteurs sont coplanaires si et seulement si : $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ avec a,b et c des réels.

Avec des coordonnées :

1) On résout le système : $\begin{cases} ax + bx' + cx'' = 0 \\ ay + by' + cy'' = 0 \\ az + bz' + cz'' = 0 \end{cases}$ si on trouve une solution, les vecteurs sont coplanaires.

Sans coordonnées : on utilise la relation de Chasles et des propriétés de la figure pour exprimer un vecteur en fonction des deux autres.

Un point M appartient à un plan caractérisé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point A ssi il existe a et b tels que :

$$\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

Exemples : Les vecteurs $\vec{u}(2\,;-1\,;3)$; $\vec{v}(1\,;5;-2)$ et $\vec{w}(4;4;1)$ sont-ils coplanaires ?

A vous de jouer : Les vecteurs $\vec{u}(2\,;-1\,;3)$; $\vec{v}(1\,;5;-2)$ et $\vec{w}(4;4;1)$ sont-ils coplanaires ?