VECTEURS, DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Vecteurs de l'espace : Toutes les propriétés du plan sont valables dans l'espace.

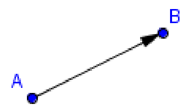
Caractérisation :

$\overrightarrow{AB}$: c'est la translation qui transforme le point A en point B (c'est un déplacement)

Un vecteur peut également se noter avec une lettre minuscule $\vec{u}$, c'est un représentant de la translation $\overrightarrow{AB}$ si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

Un vecteur est caractérisé par :

- son sens (ici de A vers B) indiqué par la flèche
- sa direction indiquée par la droite (AB)
- sa norme indiquée par la longueur $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\vec{u}\|$



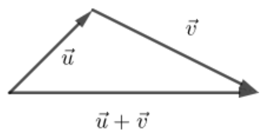
Deux vecteurs sont égaux ssi ils ont même direction, même sens et même norme.

Propriétés :

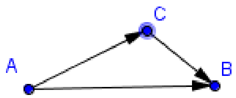
- Egalité : Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors ABDC est un parallélogramme.

$\vec{u} = \vec{v}$ deux vecteurs sont égaux ssi ils ont même direction, même sens et même norme.

- Vecteurs opposés : $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ sont des vecteurs opposés (même direction, même norme mais sens opposés). L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$
- Somme de deux vecteurs : Enchaînement de deux translations $\vec{u} + \vec{v}$



- Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\boldsymbol{C}} + \overrightarrow{\boldsymbol{C}B}$



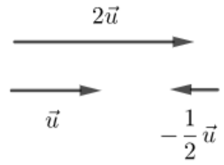
- Produit par un réel d'un vecteur : $\times \vec{u}$ (k réel)

Propriétés du vecteur :

Direction : la même que $\vec{u}$

Sens : Si $k > 0$ même que $\vec{u}$ Si $k < 0$ de sens contraire

Norme : $\|k \times \vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$



- Propriétés algébriques :

Commutativité : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Associativité : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

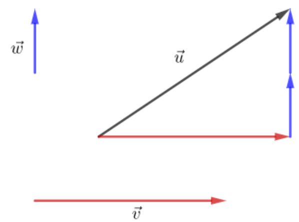
Distributivité : $k \times (\vec{v} + \vec{w}) = k \times \vec{v} + k \times \vec{w}$

$$(k + k') \times \vec{v} = k \times \vec{v} + k' \times \vec{v}$$

Produit nul : $k \times \vec{v} = 0 \leftrightarrow k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace : $\vec{u}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ si et seulement si on a :

$\boldsymbol{\vec{u} = \lambda \times \vec{v} + \mu \times \vec{w}}$ avec λ et μ des réels non-nuls.

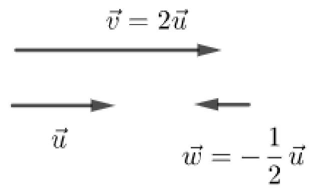


Droites de l'espace :

Colinéarité de deux vecteurs :

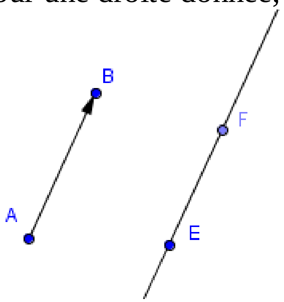
$\vec{u}$et $\vec{v}$sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} = k \times \vec{v}$ avec k un réel.

Les vecteurs ont la même direction.



$\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires (même direction)

Vecteur directeur d'une droite : c'est un vecteur de même direction que la droite (« parallèle ») à la droite.
Pour une droite donnée, il existe une infinité de vecteurs directeurs.



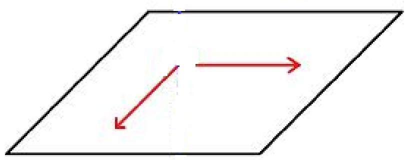
$\overrightarrow{AB}$et$\overrightarrow{EF}$ sont deux vecteurs directeurs de (EF).

Tout vecteur colinéaire à un vecteur directeur d'une droite est un vecteur directeur.

Caractérisation : Une droite de l'espace est définie par deux points de l'espace ou par un point et un vecteur directeur.
Soit la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ alors tout point M de la droite (d) vérifie $\boldsymbol{\overrightarrow{AM}} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\vec{u}}$ avec k un réel non nul ($\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires)

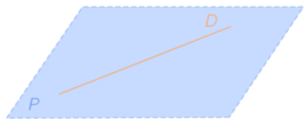
<u>Plan de l'espace :</u>

Caractérisation : Trois points non alignés définissent un plan que l'on peut noter (ABC) par exemple. C'est une « surface » de l'espace. Dans un plan, on peut appliquer tous les théorèmes de géométrie plane vues depuis le collège. On peut également définir un plan à partir d'un point et de deux vecteurs non colinéaires.
Soit le plan (P) passant par A et défini par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors tout point M du plan (P) vérifie $\boldsymbol{\overrightarrow{AM}} = \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\vec{u}} + \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\vec{v}}$ avec μ et λ des réels non-nuls. ($\overrightarrow{AM}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$)

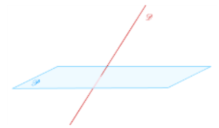


<u>Positions relatives de plans et de droites :</u>

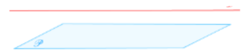
<u>Entre un plan et une droite :</u>



La droite est incluse dans le plan.
<u>Comment prouv er ?</u>
Il suffit de démontrer qu'au moins deux points de la droite appartiennent au plan.

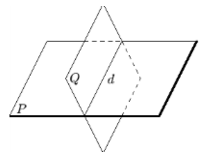


La droite est sécante à un plan
<u>Comment prouver ?</u>
Il suffit de démontrer que la droite a un seul point d'intersection avec le plan.

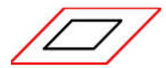


La droite est parallèle au plan
<u>Comment prouver ?</u>
Il suffit de démontrer que la droite n'a pas de point commun avec le plan

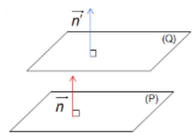
<u>Entre deux plans :</u>



Les deux plans sont sécants (selon une droite)
<u>Comment prouver ?</u>
Il suffit de démontrer que la droite d'intersection appartient aux deux plans

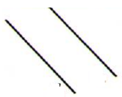


Les deux plans sont confondus
<u>Comment prouver ?</u>
Il suffit de démontrer que trois points non-alignés appartiennent aux deux plans.



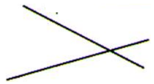
Les deux plans sont parallèles
<u>Comment prouver ?</u>
Il suffit de démontrer que deux plans n'ont pas de point commun.

Entre deux droites :

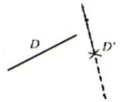


Les deux droites sont parallèles
Comment prouver ?
Théorème du milieu, Thalès,…

Les deux droites sont confondues
Comment prouver ?
Au moins deux points communs.



Les deux droites sont sécantes
Comment prouver ?
Un unique point commun.



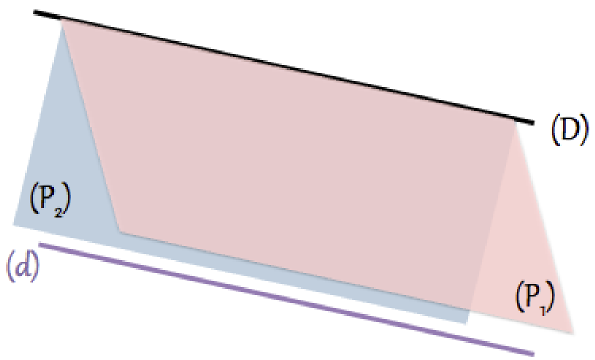
Les deux droites sont non-coplanaires
Comment prouver ?
Pas dans un même plan.

Dans les trois premiers cas, les droites sont également coplanaires (elles appartiennent à un même plan).

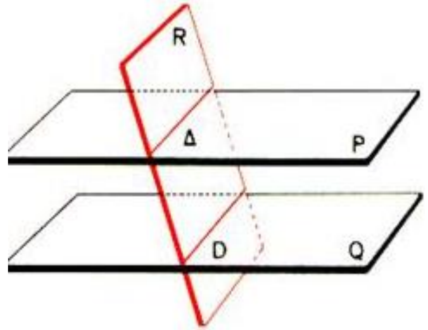
Théorèmes sur le parallélisme:

Droites parallèles :

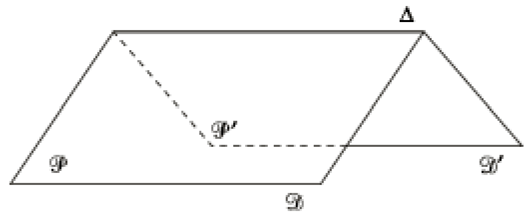
- Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles.
- Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à la droite d'intersection des deux plans.



- Si deux plans sont parallèles alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.



Théorème du toit : Si une droite (d) appartenant à un plan P et une droite (d') appartenant à un plan P' sont parallèles et si P et P' sont sécants alors la droite d'intersection de P et P' est parallèle à (d) et (d').



Plans parallèles :

- Deux plans parallèles à un même troisième plan sont parallèles entre eux.
- Si deux droites sécantes d'un plan P sont parallèles resp. à deux droites sécantes d'un plan P' alors P et P' sont parallèles.

Droites et plans parallèles :

Si (d) est parallèle à (d') alors (d) est parallèle à tout plan contenant (d') (sans contenir (d)).

Bases et repères de l'espace

Vecteurs coplanaires : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires $\leftrightarrow a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ avec a,b,c réels.

Points coplanaires : A, B, C et D sont coplanaires $\leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires

Base : Les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ définissent une base de l'espace si et seulement si ces vecteurs sont non-coplanaires.

Décomposition d'un vecteur dans une base : Soit la base de l'espace $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ alors tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ on peut alors écrire :

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

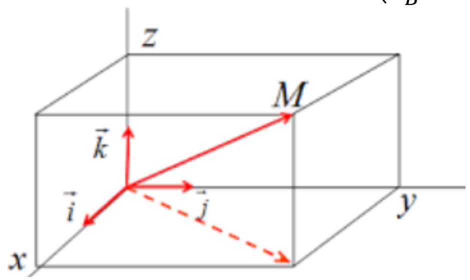
Avec x, y et z des réels qui sont **les coordonnées** du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Repère de l'espace : Soit un point O de l'espace et une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ alors $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère de l'espace et tout point M de l'espace vérifie une unique égalité de la forme :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Les coordonnées du point M sont alors M (x ; y ; z)

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$



Somme :

$$\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$$

Produit :

$$k \times \vec{u}\begin{pmatrix} k \times x \\ k \times y \\ k \times z \end{pmatrix}$$

Barycentre (Appro.) : Soit n points A_i pondérés d'un poids α_i (A_1, α_1) ; (A_2, α_2); … ; (A_n, α_n) avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$, il existe un point G (barycentre) qui vérifie $\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = 0$

Propriété : Si K est barycentre de (A, α) ; (B,β) alors G est barycentre de (K, α+β) et (C, γ) et barycentre de (A, α) ; (B,β) et (C, γ)

Méthodes (exercices) :

	Hachette	**Hatier**	**Mes exos**	**Sesamaths**
A) Représenter des combinaisons linéaires	5	35-36,61,62	1	6
B) Lire une décomposition/base/calcul	1		2	7
C) Position relative	17-21	42-45,97-108	3	8
D) Sections de solides	22-23		4	9
E) Déterminer si des vecteurs forment une base/Lire des coordonnées	33-34,29,27	110	5	10
F)Alignement/colinéarité/parallélisme/point appartenant à une droite	39,47,6	37-38,72,80, 81,87	6	11
G) Coplanarité/ Point appartenant à un plan.	10-13,36,49	39-41,83-85	7	12

Exercices de synthèse :

	Hachette	**Hatier**	**Mes exos**	**Sesamaths**
Synthèse	44,52,53,59-75	136-156	8	13
Vrai/faux	9,17	92	9	
Approfondissement			10	
QCM	18			