

SYNTHESE GENERALE – MATHEMATIQUES – GEOMETRIE VECTEURS, DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Cours :

Formule pour calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors ?

Comment montrer un alignement ? parallélisme ? colinéarité ?

L'égalité qui traduit que trois vecteurs sont coplanaires ?

Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base :

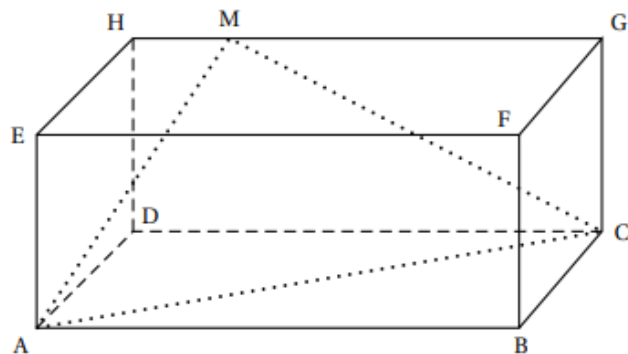
1) Il faut utiliser la relation de chasles et d'éventuelles égalités vectorielles pour décomposer le vecteur selon les vecteurs de la base.

2) Dans le cas d'une recherche de coordonnées, Pour le point M dans la base $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$, on cherche a, b et c tels que

$$\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD}$$

Amérique du sud 2022 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées (5; 0; 0), (0; 3; 0) et (0; 0; 2).



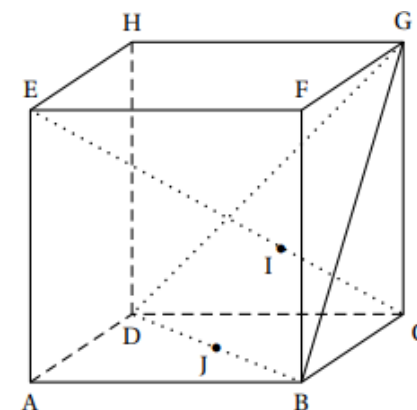
1. a. Donner, dans le repère considéré, les coordonnées des points H et G.

Métropole 2023 :

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1.

On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

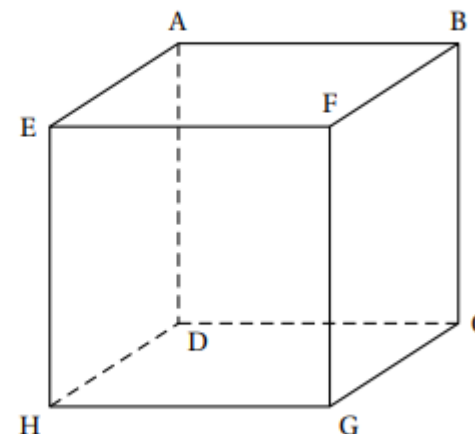


1. Donner dans ce repère les coordonnées des points E, C, G.

Réunion 2023 :

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous tel que $AB = 1$.

On note M le centre de la face BCGF et N le centre de la face EFGH.



On se place dans le repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$.

1. Donner sans justifier les coordonnées des points F et C.
2. Calculer les coordonnées des points M et N.

Problèmes d'alignement/parallélisme

Pour montrer que les points A,B,C sont alignés on cherche à montrer que :

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires } \leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \times \overrightarrow{AC}$$

Trois points définissent un plan si ils ne sont pas alignés.

Pour montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont colinéaires } \leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \times \overrightarrow{CD}$$

Asie 2023 :

Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$, on considère les points M, N et P de coordonnées :

$$M\left(1; 1; \frac{3}{4}\right), \quad N\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), \quad P\left(1; 0; -\frac{5}{4}\right)$$

3. Justifier que les points M, N et P ne sont pas alignés.

Bac

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points

$$A(2; 1; -1), \quad B(-1; 2; 4), \quad C(0; -2; 3), \quad D(1; 1; -2)$$

1. Affirmation 1 : les points A, B et C définissent un plan.

Points coplanaires ou pas

On cherche à trouver a et b tels que :

$$A, B, C \text{ et } D \text{ coplanaires } \leftrightarrow \overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AD}$$

Amérique du sud 2023 :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points :

$$A(1; 1; -4), \quad B(2; -1; -3), \quad C(0; -1; -1) \quad \text{et} \quad \Omega(1; 1; 2).$$

Justifier que le point Ω n'appartient pas au plan (ABC).

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points :

A de coordonnées $(1; 1; 0)$, B de coordonnées $(2; 0; 3)$, C de coordonnées $(0; -2; 5)$ et D de coordonnées $(1; -5; 5)$.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Réprésenter des combinaisons linéaires de vecteurs

Pour représenter $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$:

On part de A et on effectue la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$: on obtient B

On part ensuite de B et on effectue la translation de $2\overrightarrow{CD}$ (On reporte 2 fois la longueur CD en respectant le parallélisme de la droite (CD))

On relie le point A au point final et la représentation est terminée.

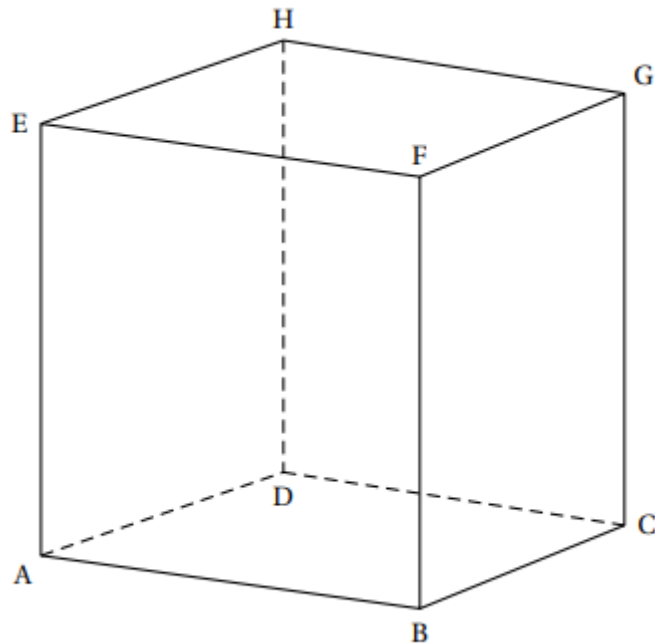
Pour placer un point M vérifiant une égalité vectorielle, on fait de même et M est le point final de la combinaison linéaire.

Asie 2023 :

Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$, on considère les points M, N et P de coordonnées :

$$M\left(1; 1; \frac{3}{4}\right), \quad N\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), \quad P\left(1; 0; -\frac{5}{4}\right)$$

2. Placer les points M, N et P sur la figure donnée en ANNEXE qui sera à rendre avec la copie.



Décrire une position relative de deux droites

Deux droites peuvent être :

- Sécantes (4 points dans un même plan et non parallèles)
- Confondues (trouver 2 points communs)
- Parallèles (Thalès, Théorème du Toit, parallèles à 3^e droite, deux plans parallèles et un 3^e plan est sécant, les droites d'intersection sont parallèles)
- Non-coplanaires (4 points non-coplanaires)

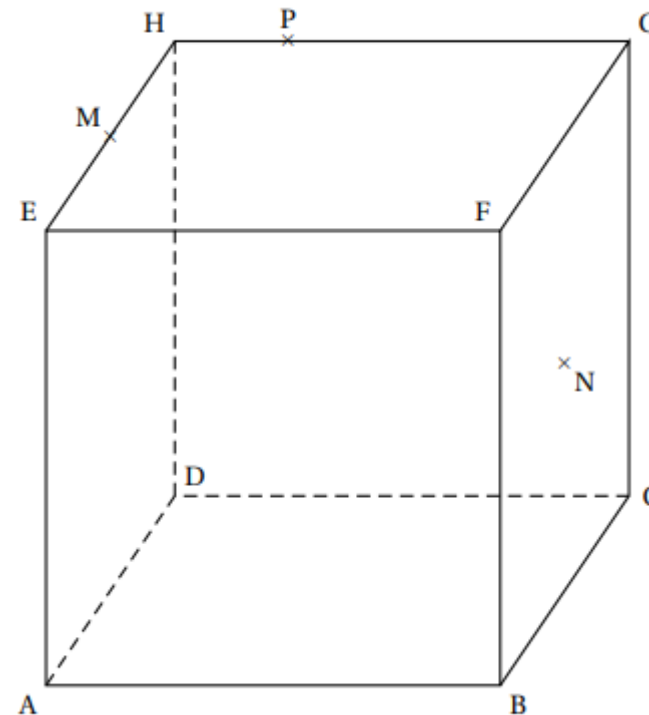
Amérique du Nord 2014c

On considère un cube ABCDEFGH donné en annexe 2 (à rendre avec la copie).

On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que

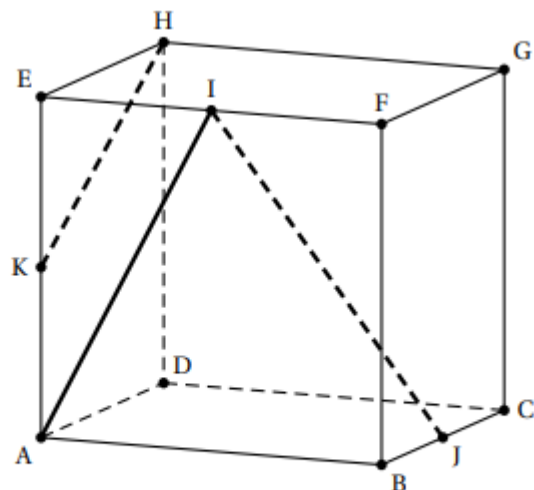
$$\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}.$$

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.



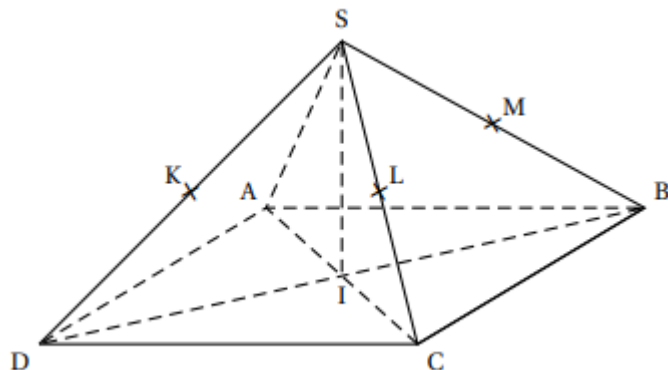
Amérique du nord 2021 :

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles? Justifier votre réponse.

Sujet 0 2021 :



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.

Le point I est le centre du carré ABCD.

On suppose que : $IC = IB = IS = 1$.

Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

- a.** (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Décrire une position relative d'une droite et d'un plan

Une droite et un plan peuvent être :

- Sécants en un point : Un point commun mais un deuxième en dehors
- Parallèles si (d) parallèles à (d') alors tout plan contenant (d') est parallèle à (d)
- La droite est incluse dans le plan : Au moins deux points dans le plan.

Amérique du nord 2021 :

On reprend la figure ci-contre.

1) Que peux tu dire de la droite (IJ) et du plan (EHG) ?

2) de (AD) et de (EFG) ?

Décrire une position relative de deux plans

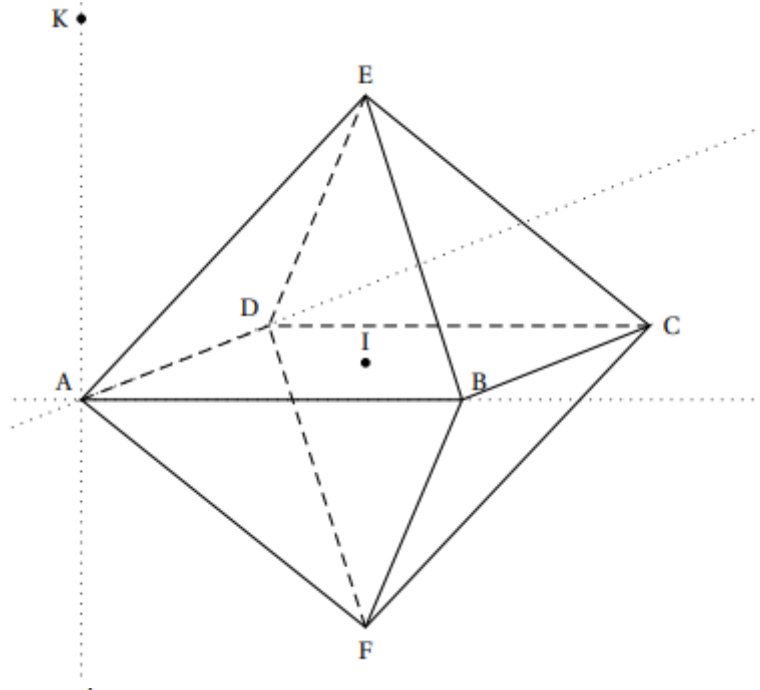
Deux plans peuvent être :

- Confondues : Trois points communs non alignés
- Sécants : Deux points communs
- Parallèles : Deux droites sécantes à P et deux droites sécantes à P' sont parallèles alors les plans sont parallèles. Passer par un troisième plan

Liban 2016 :

On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui du segment [AB].

- Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.
- Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).



.....

.....

.....

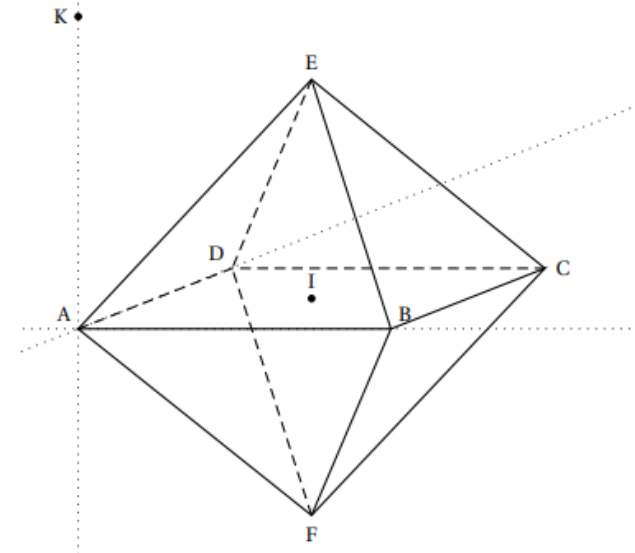
.....

Décrire une position relative d'une droite et d'un plan
Construire une section de solides

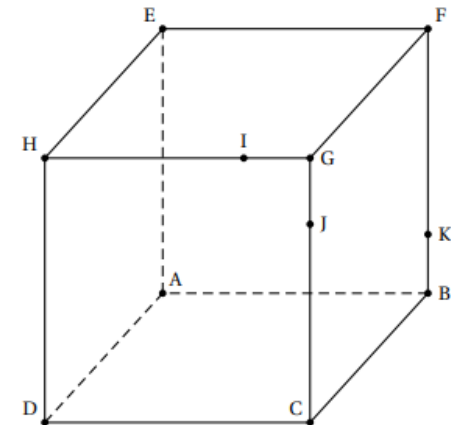
Prolonger les arêtes et les droites situées dans un même plan pour relier les points entre eux.

Liban 2016 :

- Construire sur l'annexe (à rendre avec la copie) la section du solide ADECBF par le plan (EMN).*



Nouvelle calédonie 2016 :



- Sur le document réponse donné en annexe, à rendre avec la copie, tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJK) où K est un point du segment [BF].

SYNTHESE GENERALE – MATHEMATIQUES – GEOMETRIE – ORTHOGONALITE ET DISTANCES DANS L'ESPACE

Cours :

Formule du produit scalaire avec un angle et avec coordonnées

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors ?

Qu'est ce qu'une base orthornormée ?

Expression de la norme d'un vecteur ?

Deux droites sont orthogonales ssi ? Un plan et une droite ssi ?

A quel condition un vecteur est-il normal à un plan ?

Projeté orthogonal d'un point sur une droite ? sur un plan ?

Démontrer une orthogonalité

0) Pour l'orthogonalité entre deux vecteurs il suffit de prouver que
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

1) Pour l'orthogonalité entre deux droites de vecteurs directeur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ il suffit de prouver que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2) Pour l'orthogonalité d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ à un plan de vecteur normal $\vec{n}$, il suffit de montrer que :

$\vec{u} = k\vec{n}$ (colinéarité) ou $\vec{u}$ orthogonales à deux vecteurs non colinéaires du plan

3) Montrer qu'un vecteur est normal à un plan

Il est orthogonales à deux vecteurs non colinéaires du plan

Centres étrangers 2023 :

A(3; 0; 1), B(2; 1; 2) et C(-2; -5; 1).

Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Asie 2023 :

M(1; 1; $\frac{3}{4}$), N(0; $\frac{1}{2}$; 1), P(1; 0; $-\frac{5}{4}$)

Montrer que le vecteur $\vec{n}(5; -8; 4)$ est un vecteur normal au plan (MNP).

Métropole septembre 2023 :

A(1; 0; -1), B(3; -1; 2), C(2; -2; -1) et D(4; -1; -2).

a. Montrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathcal{P}$.

b. Montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère

- le point A de coordonnées (1; 3; 2),

- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

le point M_0 de coordonnées (2; 2; 0)

Démontrer que les droites (AM₀) et (d) sont orthogonales

Calculer un angle :

On combine : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Avec $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

Pour avoir : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC}$

Amérique du Nord 2022 :

A(6; 0; 2), R(6; 3; 4) et T(3; 0; 4),

b. Calculer le produit scalaire $\vec{AR} \cdot \vec{AT}$.

c. En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{RAT}$.

Nouvelle calédonie 2023 :

On considère les points E(1; 2; 1), F(2; 4; 3) et G(-2; 2; 5).

On peut affirmer que la mesure α de l'angle $\widehat{FEG}$ vérifie :

a. $\alpha = 90^\circ$

b. $\alpha > 90^\circ$

c. $\alpha = 0^\circ$

d. $\alpha \approx 71^\circ$

Calculer une distance

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ avec $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Métropole 2022 :

le point A de coordonnées (-1; 1; 3), le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right)$.

c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

Amérique du Nord 2022 :

A(6; 0; 2), R(6; 3; 4) et T(3; 0; 4)

a. Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.

Calculer des aires

Triangle : $\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$ Disque : $\mathcal{A} = \pi \times r^2$ Rectangle : $\mathcal{A} = L \times l$

Centres étrangers 2023 :

les coordonnées de H sont (0; -1; 2). B(2; 1; 2)

On considère le cercle $\mathcal{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle $\mathcal{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathcal{C}$.

Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathcal{D}$.

Asie 2023 :

$M\left(1; 1; \frac{3}{4}\right), \quad N\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), \quad P\left(1; 0; -\frac{5}{4}\right)$

4. a. Calculer le produit scalaire $\vec{MN} \cdot \vec{MP}$, puis en déduire la nature du triangle MNP.

b. Calculer l'aire du triangle MNP.

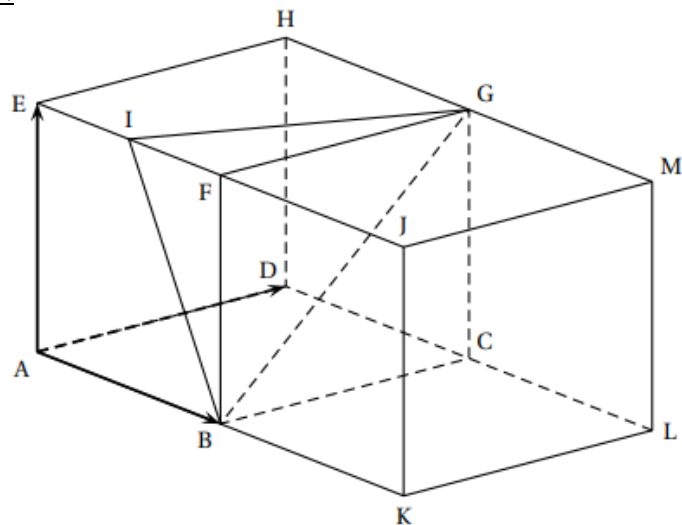
Calculer un volume :

« Pointus » (cone, tétraèdre, pyramide) : $V = \frac{1}{3} \times \text{airebase} \times \text{hauteur}$

Non points : $V = \text{airebase} \times \text{hauteur}$

Boule : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$

Asie 2023 :



Le point I est le milieu de [EF].

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.
Ainsi, par exemple, les points F, G et J ont pour coordonnées

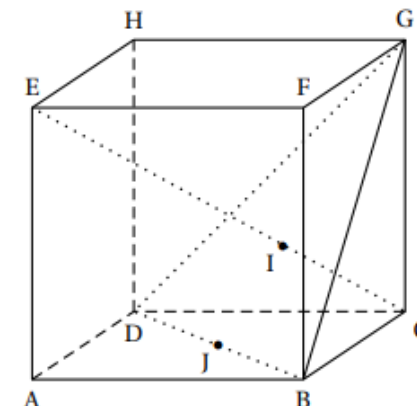
$$F(1; 0; 1), \quad G(1; 1; 1) \quad \text{et} \quad J(2; 0; 1).$$

1. Montrer que le volume du tétraèdre FIGB est égal à $\frac{1}{12}$ d'unité de volume.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur correspondante}.$$

Métropole 2023 :



On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1.

On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).

5. a. Démontrer que le triangle BDG est équilatéral.
b. Calculer l'aire du triangle BDG.

On pourra utiliser le point J, milieu du segment [BD].

6. Justifier que le volume du tétraèdre EGBD est égal à $\frac{1}{3}$.

$A(3; -2; 2), B(6; 1; 5), C(6; -2; -1)$ et $D(0; 4; -1)$.

- a. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
b. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
c. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.

Calculer la distance d'un point A à un plan :

1) Déterminer H, le projeté orthogonal du point A sur le plan
- C'est le point d'intersection entre une droite orthogonale au plan et passant par A et le plan.

2) Calculer la distance AH.

Métropole septembre 2023 :

C(2; -2; -1) et D(4; -1; -2).

les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathcal{P}$.

la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$

Sur le plan $\mathcal{P}$, que représente le point C par rapport à D?

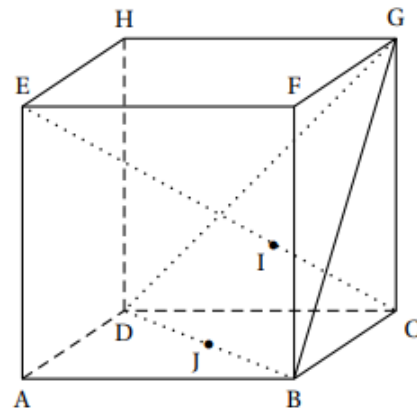
- Calculer la distance CD.
- Existe-t-il un point M du plan $\mathcal{P}$ différent de C vérifiant $MD = \sqrt{6}$? Justifier la réponse.

Métropole 2023 :

On considère le cube ABCDEFCH d'arête 1.

On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



3. Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).

le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

c. En déduire que la distance du point E au plan (GBD) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Centres étrangers 2023 :

On note $\mathcal{D}$ la droite passant par le point F(15; -16; -8) et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

On appelle E le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$.

le point E a pour coordonnées (2; 0; 1).

Déterminer la valeur exacte de la distance du point F au plan $\mathcal{P}$.

Centres étrangers 2022 :

A(3; -2; 2), B(6; 1; 5), C(6; -2; -1) et D(0; 4; -1).

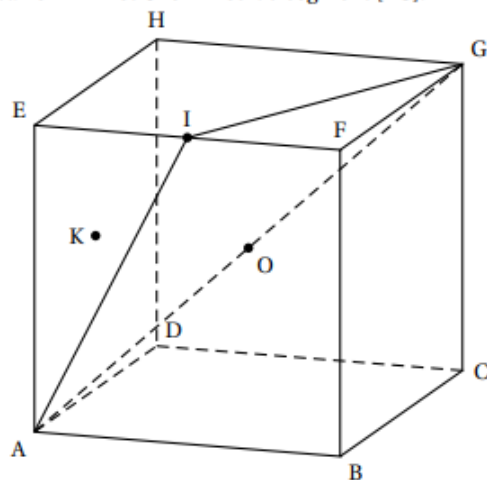
On considère le point H(5; 0; 1).

- Montrer qu'il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{BH} = \alpha \overrightarrow{BC} + \beta \overrightarrow{BD}$.
- Démontrer que H est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
- En déduire la distance du point A au plan (BCD).

Polynésie 2022

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Le point I est le milieu du segment [EF], K le centre du carré ADHE et O le milieu du segment [AG].



1. a. Justifier que dans le tétraèdre ABIG, [GF] est la hauteur relative à la base AIB.
b. En déduire le volume du tétraèdre ABIG.

2. On admet que $AI = IG = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et que $AG = \sqrt{3}$.

Démontrer que l'aire du triangle isocèle AIG est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

3. En déduire la distance du point B au plan (AIG).

Calculer la distance d'un point A à une droite :

- 1) Déterminer H, le projeté orthogonal du point A sur la droite (d)
- C'est le point d'intersection entre une droite orthogonale à la droite (d) et passant par A et la droite (d)
- 2) Calculer la distance AH.

Métropole septembre 2023 :

On considère le point $A(1; 1; 1)$

On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ .

3. On rappelle que, d'après la question 2. b, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0; -2 + t; t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.
 - a. Montrer que, pour tout réel t , $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.
 - b. En déduire que $AH = \sqrt{3}$.

Polynésie 2023 :

4. Pour tout réel t , on note M le point de $\mathcal{D}$ de coordonnées $(1 + 2t; -t; 3 - 2t)$.
On considère alors la fonction f qui à tout réel t associe AM^2 , soit $f(t) = AM^2$.
 - a. Démontrer que pour tout réel t , on a : $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$.
 - b. Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées $(3; -1; 1)$.
5. On note H le point de coordonnées $(3; -1; 1)$.
Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

CALCUL INTEGRAL

Cours :

Quelle est l'interprétation graphique de $\int_a^b f(x)dx$ avec f fonction positive sur [a,b] ?

.....

.....

Comment exprimer à l'aide d'une intégrale, la primitive du fonction f qui s'annule en a ?

.....

.....

Comment calcule-t-on $\int_a^b f(x)dx$?

.....

.....

Que peut-on dire de toute fonction continue ?

.....

.....

Donner les propriétés de linéarité, positivité, inégalité et relation de Chasles des intégrales.

.....

.....

.....

.....

Valeur moyenne d'une fonction sur [a ; b] ?

.....

.....

Formule de l'intégration par parties ?

.....

.....

Estimer graphiquement/encadrer une intégrale/valeur moyenne.

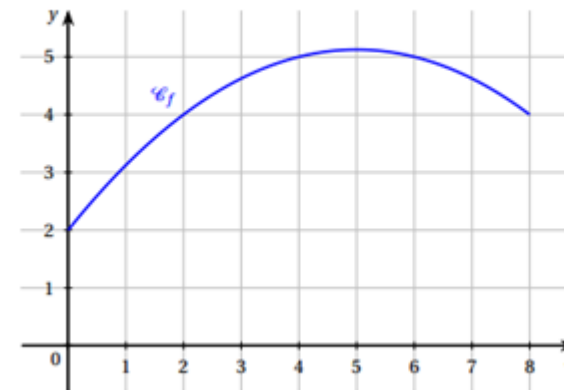
1) L'intégrale d'une fonction positive est l'aire sous la courbe.

On trace des rectangles ou triangle pour estimer la valeur de l'intégrale en utilisant le fait que : $\mathcal{A}_{triangle} = \frac{base \times hauteur}{2}$ et $\mathcal{A}_{rectangle} = L \times l$

2) Pour une valeur moyenne, on a juste a multiplié par 1/(b-a) le résultat précédent.

QCM ES :

On considère une fonction f définie sur [0; 8] dont $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative dessinée ci-dessous :

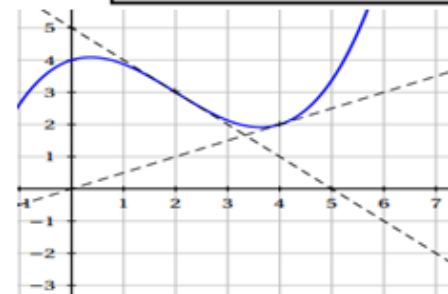


Encadrer entre deux entiers $\int_2^4 f(x)dx$. Donner une valeur arrondie au dixième.

QCM ES :

Une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de f sur l'intervalle [0; 5] est :

A. -0,1	B. 2,5
C. 2,9	D. 14,5



Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive :

1) Connaître le tableau de primitives.

2) $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Asie 2010 (suite d'intégrale) :

Pour tout entier naturel $n \geq 2$ on considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx.$$

1. Calculer I_2 .

.....

.....

.....

Antilles 2010 :

1. Montrer que $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$.

.....

.....

.....

Liban 2018 (suites d'intégrales)

Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right).$$

.....

.....

.....

.....

.....

Calculer une intégration par parties

1) $\int_a^b u' \times v = [u \times v]_a^b - \int_a^b u \times v'$

$P(x) \times e^x$: alors $u' = e^x$ et $v = P(x)$

$P(x) \times \cos(x)$ ($\sin x$) : alors $u' = \cos(x)$ (*ou* $\sin$) et $v = P(x)$

$P(x) \times \ln(x)$: alors $u' = P(x)$ et $v = \ln(x)$

Asie 2010 (suite d'intégrale) :

a. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx$

.....

.....

.....

.....

.....

La réunion 2010 :

1. Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(x) dx$. On pourra utiliser une intégration par parties.

.....

.....

.....

Amérique du Nord 2008 (suite d'intégrales) :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t dt \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t dt.$$

À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.

.....

.....

.....

.....

.....

Majorer/Minorer une intégrale : $\int_a^b f(x)dx$

- 1) Encadrer $f(x)$ sur $[a ; b]$ avec un par exemple un tableau de variations ou si f est monotone, par opérations successives.
- 2) Utiliser le théorème sur les intégrations et inégalités.

Pondichéry 2008 :

c. Montrer que si $1 \leq x \leq 3$, alors $\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$.

d. En déduire un encadrement de $\int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$ puis de $\int_1^3 f(x) dx$.

Centres étrangers 2019 :

4. a. Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.
- b. Justifier que : $\int_0^1 x^n e dx = \frac{e}{n+1}$.
- c. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.
- d. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Calculer l'aire entre deux courbes :

- 1) Déterminer la position relative des deux courbes sur $[a ; b]$
- 2) On note f , la fonction dont la courbe représentative est située au dessus de l'autre sur $[a ; b]$.

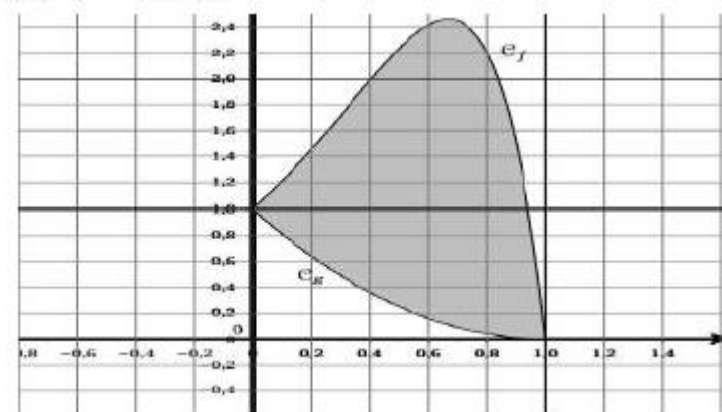
$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$ si f est au dessus de g .

Terminale ES :

pour tout réel x de $[0 ; 1]$,

$$f(x) = (1-x)e^{3x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 2x + 1.$$

Leurs courbes représentatives seront notées $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



Calculer l'aire S , en unité d'aire, de la partie grisée. Arrondir le résultat au dixième.

Démontrer une relation de récurrence :

Bac S :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx.$$
$$I_{n+2} = \frac{1}{2}e^{-\frac{n+1}{2}}I_n.$$

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.

Bac S :

pour tout entier naturel n , $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

4. a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx.$$

b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

INTERPRETER UNE INTEGRALE :

Interpréter une valeur moyenne.

$$1) \mu = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x) dx$$

2) C'est la valeur prise en moyenne par f sur $[a ; b]$

Polynésie ES 2019 :

Cette même entreprise envisage la fabrication de semoirs (gros matériel agricole). On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 100]$ par

$$g(x) = 2x - 1 + e^{0,05x}$$

modélise le coût de fabrication, exprimé en centaines d'euros, de x semoirs.

1. Donner une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 100]$.
2. Calculer la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 100]$.
3. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Centres étrangers S 2018 :

Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.

À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 20]$ par :

$$f(t) = (0,8t + 0,2)e^{-0,5t} + 0,03.$$

3. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.

a. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 11]$ par :

$$F(t) = (-1,6t - 3,6)e^{-0,5t} + 0,03t.$$

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 11]$.

- b. En déduire le taux moyen V_m , valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 11]$. Arrondir le résultat au millième, soit à 0,1 %.

Interpréter une intégrale :

Si la fonction est positive : C'est l'aire sous la courbe.

Bac ES 2019 :

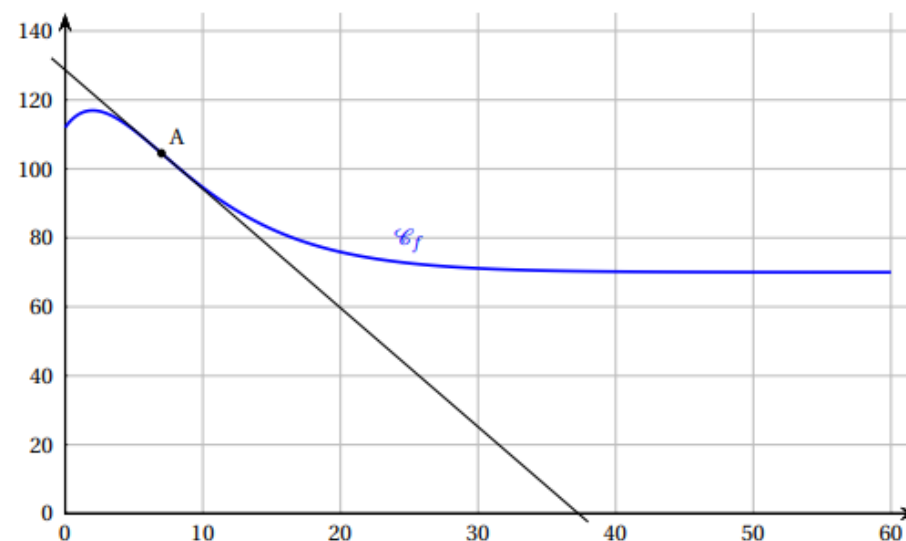
Un ébéniste décide de refaire les accoudoirs d'un fauteuil (ébauche du fauteuil en **annexe 1**). On modélise l'accoudoir à l'aide de la fonction f définie sur $[0 ; 60]$ par ;

$$f(x) = 70 + (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}}.$$

3. On considère la surface située entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 60$.

- a. Hachurer la surface décrite ci-dessus sur l'**annexe 2**.
- b. L'ébéniste estime l'aire de cette surface à 3 800 unités d'aire. Cette estimation est-elle correcte ?

Annexe 2



DEMONSTRATION : $\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f :

Pondichéry 2005 :

On considère la fonction f , définie sur $[1 ; +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{e^t}{t}.$$

1. a. Justifier la continuité de f sur $[1 ; +\infty[$.
b. Montrer que f est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

2. Restitution organisée de connaissances. (Pondichéry 31 mars 2005)

On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

Pour tout réel x_0 de $[1 ; +\infty[$, on note $\mathcal{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.

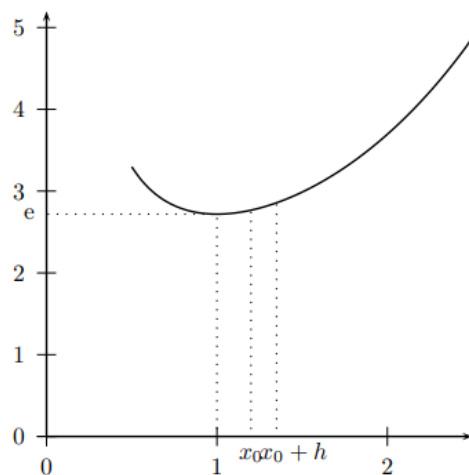
On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1 ; +\infty[$ est une primitive de f .

- a. Que vaut $\mathcal{A}(1)$?
- b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1 ; +\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h).$$

- c. Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geq 1$?
- d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction $\mathcal{A}$ ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction $\mathcal{A}$.

e. Conclure.



DEMONSTRATION : INTEGRATION PAR PARTIES :

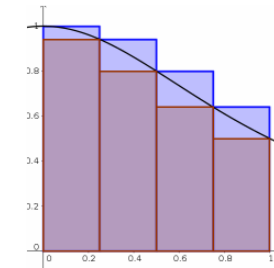
Restitution organisée de connaissances (Polynésie 10 juin 2011)

On supposera connus les résultats suivants :

- Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$.
Pour tous réels α et β , $\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)] dx = \alpha \int_a^b u(x) dx + \beta \int_a^b v(x) dx$.
- Si u désigne une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ et U une primitive de u sur $[a ; b]$ alors $\int_a^b u(x) dx = [U(x)]_a^b = U(b) - U(a)$.

En utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a ; b]$, démontrer la formule d'intégration par parties.

Python : Algorithme des rectangles



$$f(x) = \ln(-2x^2 + 13,5).$$

Pondichéry 2017 :

```
def rectangle():
    s=0
    n=50
    for k in range(1,n+1):
        R=2.5/n*f(2.5/n*k)
        S=R+S
    return(S)
```

L'algorithme, donné en annexe, permet de calculer une valeur approchée par défaut de

$$I = \int_0^{2,5} f(x) dx, \text{ notée } a.$$

On admet que : $a \leq I \leq a + \frac{f(0) - f(2,5)}{n} \times 2,5$.

a. Le tableau fourni en annexe, donne différentes valeurs obtenues pour R et S lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.

Compléter ce tableau en calculant les six valeurs manquantes.

b. En déduire une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de R et de S , arrondies à 10^{-6} , obtenues lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.

Initialisation	$S = 0, n = 50$		
Boucle Pour	Étape k	R	S
	1	...	...
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	...
	...	...	...
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	...	...	...
	49	0,020 106	5,197 538
	50	...	...
Affichage	$S = \dots$		

LIMITES

Cours :

Quelle est l'interprétation graphique d'une limite ?

.....

.....

Quelles sont les limites aux bornes de leur ensemble de définition des fonctions de référence (puissances entières, racine carrée, exponentielle) ?

.....

.....

.....

.....

.....

Quelles sont les 4 formes indéterminées ?

.....

.....

Que signifie calculer une limite par composition ?

.....

.....

Quelles sont les limites par croissances comparées de l'exponentielle ?

.....

.....

Quelles sont les limites par croissances comparées de l'exponentielle ?

.....

.....

Citer les théorèmes de comparaison

.....

.....

.....

.....

.....

CALCULER UNE LIMITE

En utilisant les limites usuelles et les règles opératoires.

- 1) On décompose la limite à calculer en autant de termes qu'il n'y a de « x ». Pour chaque expression, on utilisera une limite de référence.
- 2) On utilise les règles opératoires (opérations et composition) pour calculer la limite de la fonction si la forme n'est pas indéterminée.

Polynésie 2023 :

Soit un réel k strictement positif.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{4}{1 + e^{-kx}}.$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$,

.....

.....

Asie 2023 :

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par

$$g(x) = e^{2x} - e^x + 1.$$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

.....

.....

.....

La réunion 2023 :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x+1}{e^x}.$$

La limite de la fonction g en $-\infty$ est égale à :

a. $-\infty$

b. $+\infty$

c. 0

d. Elle n'existe pas.

En utilisant la factorisation du terme prépondérant.

1) On factorise par le terme prépondérant :

Le classement en $+\infty$ est : $\sqrt{x} < x < x^2 < \dots < x^n < \dots < e^x < \dots < e^{nx}$

2) On utilise les règles opératoires (opérations et composition) pour calculer la limite de la fonction si la forme n'est pas indéterminée.

Centres étrangers 2022 :

Que vaut :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

.....
.....

Asie 2023 :

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par

$$g(x) = e^{2x} - e^x + 1.$$

2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

.....
.....

Amérique du Nord 2023 :

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6)e^x.$$

Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

.....
.....

Métropole 2022 :

$$f(x) = 0,06(-x^2 + 13,7x)$$

Justifier la limite de f en $+\infty$.

.....
.....

Sujet 0 2021 :

Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 1}$?

.....
.....

En utilisant une croissance comparée

1) On factorise ou développe pour faire apparaître :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = 0$$

On peut aussi faire un changement de variable $X = \dots$

2) On utilise ensuite les règles opératoires.

Amérique du Nord 2023 :

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$$

b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

.....
.....
.....
.....

Amérique du Nord 2023 :

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6)e^x.$$

Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

.....
.....
.....
.....

Polynésie 2023 :

Affirmation :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = 0.$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

En utilisant un théorème de comparaison

- 1) Encadrer la fonction
- 2) Utiliser le théorème des gendarmes ou un théorème de comparaison.

Bac S 2018 :

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

.....

.....

.....

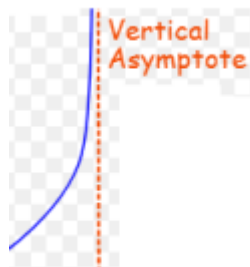
.....

Lien entre une limite et un graphique :

- 1) Si on a une limite du type : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$ alors Cf admet une asymptote verticale d'équation $x = a$



- 2) Si on a une limite du type : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$ alors Cf admet une asymptote horizontale d'équation $y = a$ en $\pm \infty$



Centres étrangers 2009 :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}.$$

Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.

Bac S 2002

Soit g la fonction définie sur $]0 ; \infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{e^{2x} - 1}$.

- a. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

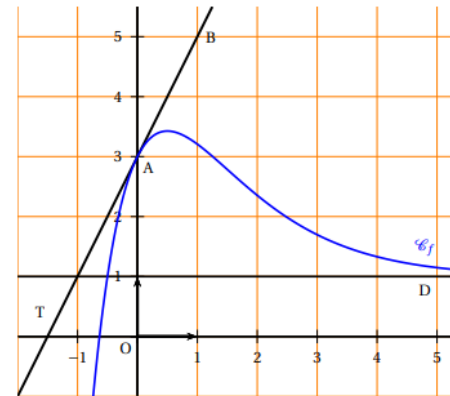
.....

.....

.....

.....

Bac ES 2011 :



1. En utilisant les données et le graphique, préciser :
- b. La limite de la fonction f en $+\infty$.

DEMONSTRATION : CROISSANCES COMPAREES DE L'EXPONENTIELLE EN + INFINI

1. On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.
Montrer que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $g(x) \geq 0$.
2. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

SUITES - RECURRENCE

Cours :

Que signifie le fait qu'une suite diverge ? converge ?

Que peut on dire de la limite d'une suite croissante non majorée ?
décroissante non minorée ?

Citer les théorèmes de comparaison

Citer les 4 formes indéterminées

Quels sont les étapes d'une récurrence ?

Citer les limites de q^n en fonction de q

Citer le théorème de convergence monotone

Suites géométriques : formule de récurrence, explicite, sommes (1^{ère})

Suites arithmétique : formule de récurrence, explicite, sommes (1^{ère})

Citer les différents modes de génération d'une suite (1^{ère})

Sens de variation d'une suite ? (1^{ère})

Etudier la limite d'une suite.

⇒ q^n : Utiliser les critères suivant

- $q > 1$; $\lim q^n = +\infty$ et $-1 < q < 1$; $\lim q^n = 0$
- $q = 1$; $\lim q^n = 1$ et $q \leq -1$; $\lim q^n = \text{pas limite}$

⇒ En cas de forme indéterminée, factorisez par le terme le plus grand

⇒ Utiliser les règles opératoires sur les limites

Centres étrangers 2023 :

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout n entier naturel par

$$u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n}.$$

Cette suite :

- a. diverge vers $+\infty$
- b. converge vers $\frac{2}{5}$

- c. converge vers 0
- d. converge vers $\frac{1}{3}$.

Polynésie 2023 :

$$p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n.$$

En déduire que la suite (p_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ .

.....

.....

.....

Métropole 2023 :

$u_n = 0,1 \times 1,6^n.$
Déterminer la limite de la suite (u_n) .

.....

.....

Nouvelle-Calédonie 2023 :

$$u_n = \frac{1}{n+0,5} - 2.$$

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

.....

.....

.....

Centres étrangers 2022 :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1$$

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

.....

.....

.....

Effectuer un raisonnement par récurrence.

Initialisation => Hérédité => Conclusion

Pour une égalité : On part de la formule de récurrence pour arriver à l'objectif en injectant l'hypothèse de récurrence.

Pour une inégalité : On part de l'hypothèse de récurrence et on atteint l'objectif en manipulant l'inégalité pour retrouver l'expression de la formule de récurrence. Si on a étudié une fonction auparavant, on peut l'utiliser pour trouver directement la réponse.

Centres étrangers 2023 :

$p_0 = 1.$
 $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4.$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $p_n \geq 0,8$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Polynésie 2023 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

.....

.....

.....

.....

Métropole 2023 :

$u_1 = 3$ et, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n.$$

Métropole 2023 :

$f(x) = 1,6x - 1,6x^2$.

Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

$v_0 = 0,1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2$,

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

Asie 2023 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 60.$$

Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a l'inégalité

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600.$$

La réunion 2023 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$n \leq u_n \leq n + 3.$$

La réunion 2023 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 2$.

Modéliser un problème par une suite :

U_n : représente une grandeur (population, chiffres d'affaires, etc...)

n : représenter une grandeur (années, mois, jours, etc...)

Evolution de pourcentage : on multiplie par $1 \pm \frac{t}{100}$

U_{n+1} est le résultat de l'évolution sur une année de u_n (lire les indications sur l'évolution d'une année sur l'autre)

Métropole 2023 :

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

On a donc $u_0 = 0,1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 0,1 \times 1,6^n$.

Asie 2023 :

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.

Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.

On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.

On admet que, au bout de 24 heures, 0,5 % des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.

On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.

Pour $n \geq 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n , on a

$$v_{n+1} = 0,995v_n + 1,5 \times 10^{19}.$$

Asie 2023 :

Pour tout entier naturel n , on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée ℓ_n et longueur L_n

La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n ,

$$L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$$

Établir que pour tout entier naturel n ,

$$\ell_n = \frac{11}{L_n}.$$

Étudier des phénomènes d'évolution modélisable par des suites.

U_n : représente une grandeur (population, chiffres d'affaires, etc...)

n : représenter une grandeur (années, mois, jours, etc...)

⇒ Seuil : Chercher au bout de combien de temps on va dépasser un seuil ? Il faut résoudre $u_n \geq l$

⇒ Calcul de termes : Combien vaut la grandeur au bout de n jours ? Calculer le terme de rang n

⇒ Comment évolue la grandeur dans très longtemps ? Calculer une limite.

⇒ Sens de variations : Savoir si la grandeur augmente ou diminue dans le temps.

Centres étrangers 2023 :

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n .

pour tout entier naturel n , $p_n \geq 0,8$.

À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ?

Métropole 2023 :

Pour préserver l'équilibre du milieu naturelle nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

$$u_n = 0,1 \times 1,6^n.$$

3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0,4$.

4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé? Justifier la réponse.

Métropole 2023 :

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n -ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \geq 1, \quad u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3.$$

1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.

.....
.....

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n.$$

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$v_n = 9 - 6 \times e^{-0,19 \times (n-1)}.$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n -ième mois sur la FAQ.

1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.

Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ?

Justifier votre réponse.

2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme ?

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Métropole 2023 :

Pour préserver l'équilibre du milieu naturel le nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

$$u_n = 0,1 \times 1,6^n.$$

3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0,4$.
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Métropole 2023 :

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.

Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n) , définie par :

$$v_0 = 0,1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n , v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.

.....
.....
.....
.....
.....

Etudier une suite géométrique

Montrer que la suite est géométrique et calculer son terme général :

- 1) Montrer que $u_{n+1} = q \times u_n$
- 2) On peut dire alors que $u_n = u_0 \times q^n$

Somme géométrique : $S = u_0 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Centres étrangers 2023 :

$$p_0 = 1.$$

$$p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4.$$

- a. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,8$.

Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

- b. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n .

Polynésie 2023 :

$$p_0 = 0,6.$$

$$p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3.$$

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = p_n - 0,75$.

- a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- b. Démontrer que, pour tout entier n naturel n :

$$p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n.$$

Asie 2023 :

Pour $n \geq 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

$$v_n = 3 \times 10^{21} (0,995^n + 1)$$

Déterminer, par le calcul, au bout de combien de jours le nombre de noyaux de polonium sera inférieur à $4,5 \times 10^{21}$. Justifier la réponse.

Nouvelle Calédonie 2023 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

- a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
Donner sa raison et son premier terme v_0 .
- b. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
- c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

La réunion 2023 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

a. Calculer v_0 .

b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Spécimen ECE 1ere :

La somme $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10}$ est égale à :

a. $2^{10} - 1$

b. 2^{10}

c. $2^{11} - 1$

d. 2^{11}

Etudier une suite arithmétique

Montrer que la suite est arithmétique et calculer son terme général :

1) Montrer que $u_{n+1} - u_n = r$

2) On peut dire alors que $u_n = u_0 + r \times n$

Calculer une somme arithmétique : $u_0 + \dots + u_n = \frac{(u_0 + u_n) \times (n+1)}{2}$

Nouvelle Calédonie 2023 :

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

a. Donner v_0 .

b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Nouvelle Calédonie 2017 :

Pour tout entier naturel n non nul,

$$(8 \times 1 + 3) + (8 \times 2 + 3) + \dots + (8 \times n + 3) = n(4n + 7).$$

.....

.....

.....

.....

.....

Etudier le sens de variation d'une suite :

- 1) Calculer $u_{n+1} - u_n$ et étudier le signe. Si positif, croissant sinon décroissant.
- 2) Montrer par récurrence la croissance ($u_{n+1} > u_n$) (le contraire pour la décroissance)

Métropole 2023 :

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n.$$

En déduire que la suite (u_n) est croissante.

La réunion 2023 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

pour tout entier naturel n , on a $u_n > 2$.

Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Nouvelle-Calédonie 2023 :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Métropole 2023 :

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_1 &= \frac{1}{e} \\ u_{n+1} &= \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right) u_n \text{ pour tout entier } n \geq 1. \end{cases}$$

On admet que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.

- a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $1 + \frac{1}{n} \leq e$.
- b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

Centres étrangers 2022 :

⁸ On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$a_{n+1} = \frac{e^n}{e^n + 1} a_n \quad \text{et} \quad a_0 = 1.$$

On peut affirmer que :

- a. la suite (a_n) est strictement croissante.
- b. la suite (a_n) est strictement décroissante.
- c. la suite (a_n) n'est pas monotone.
- d. la suite (a_n) est constante.

Etablir la convergence d'une suite, encadrement

Montrer la convergence/divergence :

Toute suite majorée et croissante converge

Toute suite minorée et décroissante converge.

Toute suite non-majorée et croissante diverge vers $+\infty$

Toute suite non-minorée et décroissante diverge vers $-\infty$

$\Rightarrow$ Pour des cas autres, utiliser des contre-exemples pour montrer que c'est faux.

Utiliser un théorème de comparaison :

Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et v_n et w_n convergent ou divergent vers l alors u_n converge ou diverge vers l (théorème des gendarmes)

Si $v_n \leq u_n$ et v_n diverge vers $+\infty$ alors u_n diverge vers $+\infty$

Polynésie 2023 :

1. **Affirmation :** La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.

2. **Affirmation :** Toute suite bornée est convergente.

3. **Affirmation :** Toute suite croissante tend vers $+\infty$.

Métropole 2023 :

pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

Montrer que la suite (v_n) est convergente.

On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Déterminer la valeur de ℓ .

Centres étrangers 2023 :

Une suite (u_n) est minorée par 3 et converge vers un réel ℓ .

On peut affirmer que :

a. $\ell = 3$

b. $\ell \geq 3$

c. La suite (u_n) est décroissante.

d. La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

Asie 2023 :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600.$$

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Asie 2023 :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{11}{u_n} \right)$$

$$u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}.$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.

Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a .

La réunion 2023 :

$$n \leq u_n \leq n+3.$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

3. Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$.

Amérique du Nord 2023 :

On considère deux suites (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ et } (v_n) \text{ converge vers } 0.$$

On peut affirmer que :

a. la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ converge.

b. la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge.

c. la suite (u_n) est croissante.

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n)^n = -\infty$

La réunion 2023 :

la suite (u_n) est décroissante.

pour tout entier naturel n , on a $u_n > 2$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Nouvelle Calédonie 2023 :

$$u_n \geq n+1.$$

En déduire la limite de la suite (u_n) .

Septembre 2022 :

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel, on a :

$$1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq u_n \leq 2 - \frac{n}{n+1}$$

On peut affirmer que la suite (u_n) :

a. converge vers 2;

b. converge vers 1;

c. diverge vers $+\infty$;

d. n'a pas de limite.

Etudier des algorithmes

Savoir les lire : Obtenir le résultat final et l'interpréter (utiliser calculatrice)

Savoir l'écrire : Compléter les lignes du programme

Algorithme de seuil : On le reconnaît au fait qu'il renvoie la valeur n (return n). Il permet de chercher la valeur de n à partir de laquelle on a un qui dépasse une certaine valeur (le contraire de la condition dans le « while »).

Métropole 2023 :

```
def seuil(p) :  
    n=1  
    u=3  
    while u<=p :  
        n=n+1  
        u=0.9*u+1.3  
    return n
```

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n -ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$u_1 = 3$ et, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3$.

On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.

Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(8.5) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

Métropole 2023 :

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.

Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n) , définie par :

$v_0 = 0,1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2$,

où, pour tout entier naturel n , v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

On donne ci-contre la fonction seuil, écrite en langage Python.

- Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4) ?
- Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35).
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(a) :  
    v=0.1  
    n=0  
    while v<a :  
        v=1.6*v-1.6*v*v  
        n=n+1  
    return n
```

Nouvelle Calédonie 2023 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^7$.

- Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
- Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite() :  
    u = 3  
    n = 0  
    while ... :  
        u = ...  
        n = n + 1  
    return n
```

Polynésie 2023 :

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3.$$

On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Recopier et compléter la fonction « seuil » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```
def seuil() :  
    u = 3  
    n = 0  
    while ...  
        u = ...  
        n = ...  
    return n
```

Algorithme de calcul de termes : On le reconnaît au fait qu'il renvoie la valeur u ou une liste (return u ou L). Il permet de calculer u_n pour un n donné ou de donner la liste des u_n . Souvent utiliser avec une boucle « for »
Asie 2023 :

Pour $n \geq 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

On souhaite disposer de la liste des termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour cela, on utilise une fonction appelée noyaux programmée en langage Python et retranscrite partiellement ci-après.

$$v_{n+1} = 0,995v_n + 1,5 \times 10^{19}.$$

$$v_n = 3 \times 10^{21} (0,995^n + 1).$$

1	def noyaux (n) :
2	V=6*10**21
3	L=[V]
4	for k in range (n) :
5	V= ...
6	L.append(V)
7	return L

- À la lecture des questions précédentes, proposer deux solutions différentes pour compléter la ligne 5 de la fonction noyaux afin qu'elle réponde au problème.
- Pour quelle valeur de l'entier n la commande noyaux(n) renverra-t-elle les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon de polonium pendant 52 semaines d'étude?

.....

.....

.....

.....

La réunion 2023 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1.$$

On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python.

n désigne un entier naturel non nul.

On rappelle qu'en langage Python « i in range (n) » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

1	def terme (n)
2	U=3
3	for i in range(n) :
4	
5	return U

Pour que terme (n) renvoie la valeur de u_n , on peut compléter la ligne 4 par :

.....

.....

Nouvelle calédonie 2023 :

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On considère la fonction terme ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

def terme (n) :
u = ...
for i in range(n) :
u = ...
return(u)

On rappelle qu'en langage Python, « i in range (n) » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n , l'instruction terme (n) renvoie la valeur de u_n .

.....

.....

Algorithme d'approximation d'une valeur : On a un « while » qui correspond à la valeur absolue d'une soustraction entre la suite qui tend vers un nombre et le nombre recherché. On cherche à savoir à quel moment l'écart est inférieur à une certaine valeur.

Sujet 2, 2021 :

$$r_{n+1} = \frac{2+r_n}{1+r_n}, \quad (r_n) \text{ converge vers } \sqrt{2}.$$

On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
        r = (2+r)/(1+r)
        n = n+1
    return n
```

(abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et 10** (-4) représente 10^{-4}).

La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.

À quoi correspond-elle?

Algorithme de sommes : On a une boucle pour et deux instructions, u et S qui s'incrémente à chaque tour de boucle. $S = S + u$.

E3C 20 – 1^{ère}

On modélise l'évolution de la production de déchets de la famille A par la suite de terme général a_n , où a_n représente la quantité, en kg, de déchets produits par la famille A n mois après décembre 2019.

$$a_{n+1} = 0.98 \times a_n \text{ et } a_0 = 120$$

On donne le programme ci-dessous.

```

1 def S(n) :
2     U = 120
3     S = 0
4     for k in range (n) :
5         U = 0.98 * U
6         S = S + U
7     return (S)
8

```

Que représente le résultat renvoyé par la fonction si on entre l'instruction S(6)?

DEMONSTRATIONS

Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.

« une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A , tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Cours :

[illegible][illegible]

.....

.....

.....

.....

.....

- ⇒ Identifier les fonctions usuelles qui constituent la fonction
- ⇒ Identifier les relations entre ces fonctions (somme, produit, quotient, composition)
- ⇒ Appliquer alors les formules de dérivation, essayer de factoriser ou de mettre au même dénominateur le résultat

Soit un réel k strictement positif.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

[illegible]

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note g' sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout nombre réel x , on a $g'(x) = 6e^{2x} - 2$.

On admet que la fonction f de la partie A est définie sur $\mathbb{R}$ par

Montrer que, pour tout réel x , on a $f'(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$.

.....

.....

.....

Faire l'étude complète d'une fonction (tableau de variations)

- ⇒ Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
- ⇒ Calculer la dérivée de la fonction
- ⇒ Etudier le signe de la dérivée, en déduire les variations
- ⇒ Interpréter le tableau pour répondre à la question.

Centres étrangers 2023 :

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(t) = e^3 - e^{-0,5t^2 + t + 2}$$

où t désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.

À partir de cette modélisation, il propose les trois affirmations ci-dessous.
Pour chacune d'elles, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

- **Affirmation 1** : « La population augmente en permanence ».

Métropole 2023 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1,6x - 1,6x^2.$$

Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Amérique du Nord 2023 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{11}{x} \right)$$

Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[\sqrt{11}; +\infty[$.

La réunion 2023 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x+2}{x+5}.$$

Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.

.....

.....

.....

.....

.....

Nouvelle Calédonie 2023 :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x e^{-x}.$$

Dresser le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$, sur lequel on fera figurer les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Métropole 2022 :

$$f(x) = 0,06(-x^2 + 13,7x)$$

On donne le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

x	0	6,85	$+\infty$
$f(x)$	0	$f(6,85)$	$-\infty$

- Justifier la limite de f en $+\infty$.
- Justifier les variations de la fonction f .
- Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Démontrer des inégalités avec la convexité

- ⇒ Si f est convexe sur I alors $f(x) \geq$ Toute équation de tangente d'un point de la courbe d'abscisse appartenant à I (Pour l'intervalle I)
- ⇒ Si f est concave sur I alors $f(x) \leq$ Toute équation de tangente d'un point de la courbe d'abscisse appartenant à I (Pour l'intervalle I)

Amérique du Nord 2023 :

On admet que la fonction f de la partie A est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6)e^x.$$

pour tout réel x , on a $f'(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f . On admet que, pour tout réel x , on a $f''(x) = (x+1)(x-2)e^x$.

- Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1; 2]$, on a $f(x) \leq x+6$.

Interpréter graphiquement la convexité en fonction de f , f' et f''

CONVEXITE

- ⇒ f convexe (tangente en dessous de sa courbe) $\Leftrightarrow f'$ croissante $\Leftrightarrow f''$ positive
- ⇒ f concave (tangente au dessus de sa courbe) $\Leftrightarrow f'$ décroissante $\Leftrightarrow f''$ négative
- ⇒ f point d'inflexion (tangente traverse la courbe) $\Leftrightarrow f'$ change de variation $\Leftrightarrow f''$ s'annule et change de signe

RAPPEL VARIATIONS (1^{ère})

- ⇒ f croissante $\Leftrightarrow f'$ positive
- ⇒ f décroissante $\Leftrightarrow f'$ négative

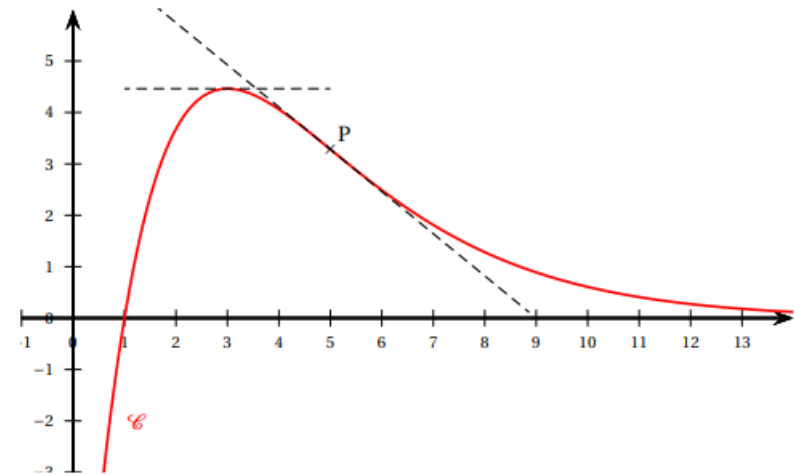
NOMBRE DERIVEE = COEFFICIENT DIRECTEUR TANGENTE $f'(a) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Equation de la tangente : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Polynésie 2023 :

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$. On sait que :

- le maximum de la fonction f est atteint au point d'abscisse 3;
- le point P d'abscisse 5 est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.



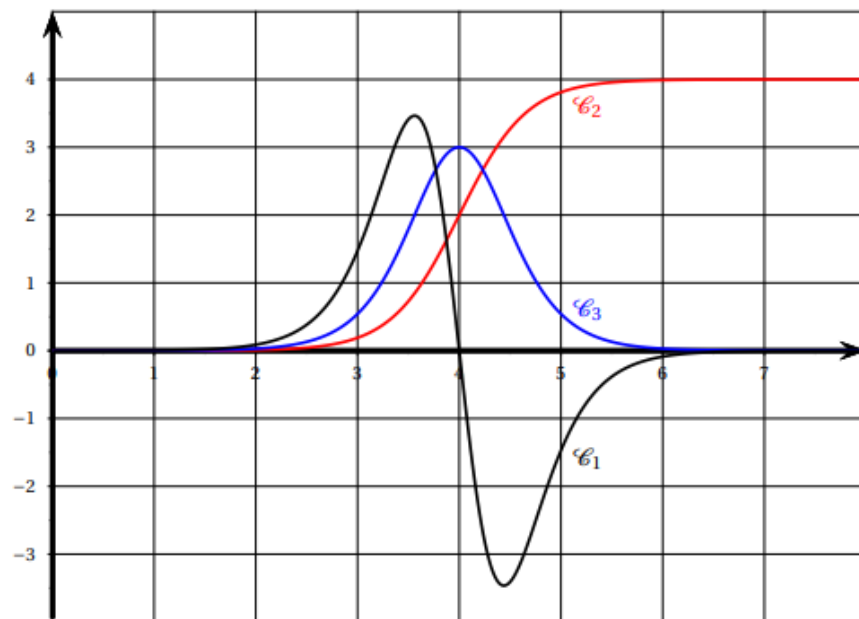
On a :

- | | |
|--|---|
| A. pour tout $x \in]0; 5[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe; | B. pour tout $x \in]5; +\infty[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe; |
| C. pour tout $x \in]0; 5[$, $f'(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe; | D. pour tout $x \in]5; +\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe. |

Polynésie 2023 :

Le plan est ramené à un repère orthogonal.

On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f'' .

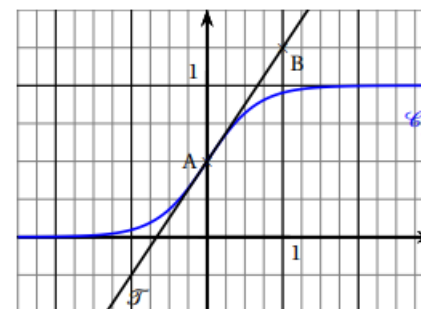


1. Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.
2. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point d'abscisse 4.
3. Donner avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_1$.

Centres étrangers 2023 :

On nomme A le point de coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1; \frac{5}{4}\right)$.

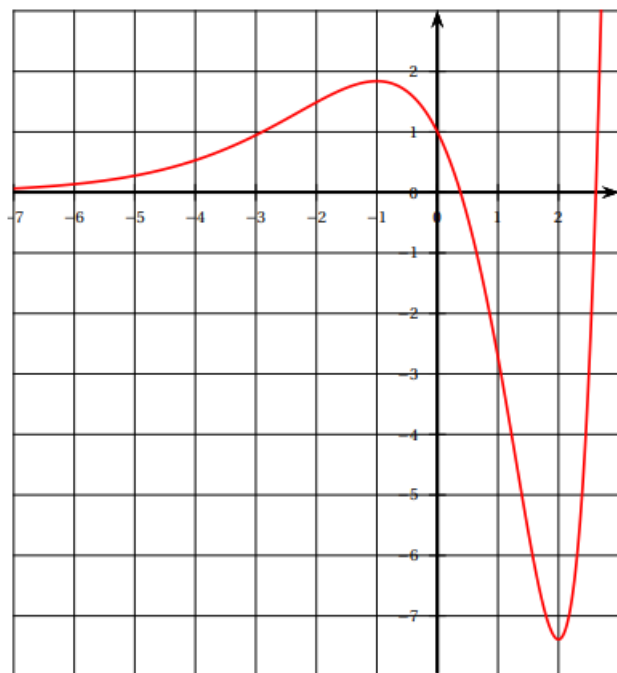
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.



1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Amérique du Nord 2023 :

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f' .



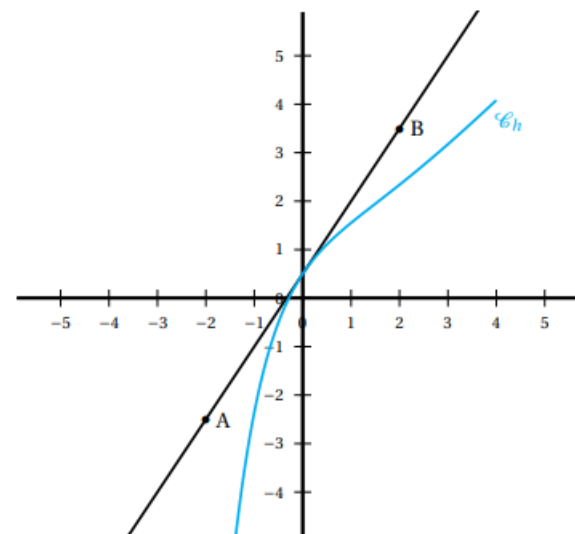
1. Donner le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On utilisera des valeurs approchées si besoin.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.

[illegible]

On considère une fonction h , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant une expression de la forme

$h(x) = (ax + b)e^{-x} + x$, où a et b sont deux réels.

- la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de la fonction h ;
- les points A et B de coordonnées respectives $(-2; -2,5)$ et $(2; 3,5)$.



Déterminer une équation de la droite (AB).

Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, en déduire les valeurs de a et b .

a.

b.

c.

d.

Polynésie 2022 :

On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2; 2]$. Le tableau de variations de la fonction f' dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-2; 2]$ est donné par :

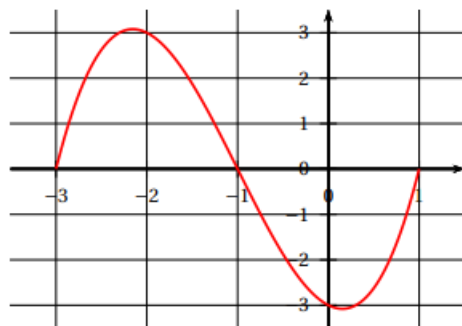
x	-2	-1	0	2
variations de f'	1	0	-2	-1

La fonction f est :

- a. convexe sur $[-2; -1]$ b. concave sur $[0; 1]$
c. convexe sur $[-1; 2]$ d. concave sur $[-2; 0]$

Centres étrangers 2022 :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3; 1]$. On donne ci-dessous la représentation graphique de sa fonction dérivée seconde f'' .

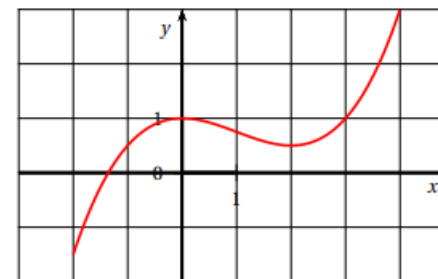


On peut alors affirmer que :

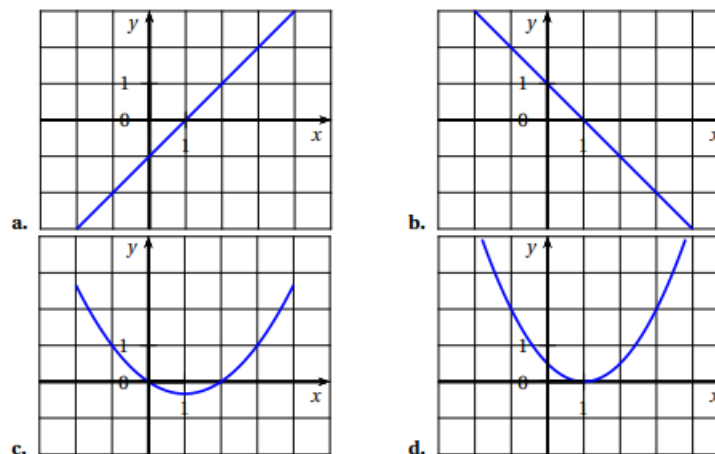
- a. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-1; 1]$ b. La fonction f est concave sur l'intervalle $[-2; 0]$
c. La fonction f' est décroissante sur l'intervalle $[-2; 0]$ d. La fonction f' admet un maximum en $x = -1$

Centres étrangers 2022 :

Dans un repère, on a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-2; 4]$



Parmi les courbes suivantes, laquelle représente la fonction f'' , dérivée seconde de f ?



Tracer l'allure d'une courbe avec un tableau de variation

Etudier la convexité d'une fonction par le calcul.

⇒ Calculer la dérivée seconde

⇒ Etudier le signe de la dérivée seconde, en déduire la convexité de f

Polynésie 2023 :

Affirmation : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$ est convexe.

Centres étrangers 2023 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-3x}}.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f .

On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{9e^{-3x}(e^{-3x} - 1)}{(1 + e^{-3x})^3}.$$

2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.

3. a. Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.

b. Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

La réunion 2023 :

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (4x - 16) e^{2x}.$$

On note $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de h dans un repère orthogonal.

On peut affirmer que :

a. h est convexe sur $\mathbb{R}$.

c. h est concave sur $\mathbb{R}$.

b. $\mathcal{C}_h$ possède un point d'inflexion en $x = 3$.

d. $\mathcal{C}_h$ possède un point d'inflexion en $x = 3,5$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....