CONTINUITE

Cours :

Donner la définition de la continuité en un point, sur un intervalle I

………

………

Que peut on dire de toute fonction dérivable ?

………

………

Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire

………

………

………

………

………

………

Etudier les solutions d'une équation f(x) = k : Existence, unicité, encadrement

1) Dresser le tableau de variation de la fonction au préalable
2) Utiliser le TVI pour prouver l'existence t l'unicité.
3) Utiliser un algorithme de dichotomie pour encadrer la solution.

Amérique du Nord 2023 :

On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-2;4]$ telle que :

$$h(-1) = 0, \qquad h(1) = 4, \qquad h(3) = -1.$$

On peut affirmer que :

a. la fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.
b. la fonction h est positive sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.
c. il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[1 ; 3]$ tel que $h(a) = 1$.
d. l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-2 ; 4]$.

………

………

………

………

………

………

Métropole 2022 :

On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par

$$f(t) = 3te^{-0,5t+1},$$

où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. a. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$ et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0; 10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t+1)e^{-0,5t+1}$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.

c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale?
Quelle est alors cette quantité maximale?

2. a. Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0;2]$ notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2; 10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.

b. On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.
Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Amérique du Nord 2023 :

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ une unique solution qui sera notée α.
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

Centres étrangers 2024 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 1.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$, on a

$$f'(x) = \frac{(x-2)\,\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}.$$

b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.

5. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Bac 2019 :

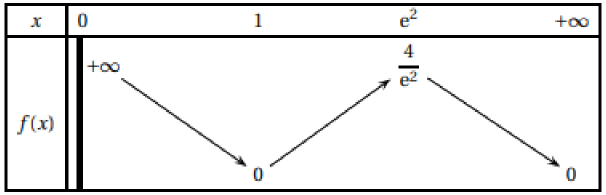
On admet dans cette partie que la courbe C est la représentation graphique d'une fonction f continue, strictement croissante, définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;1]$ d'expression :

$$f(x)=\frac{1}{20}\left(x-\frac{1}{x^4}\right).$$

1. Justifier que l'équation $f(x)=-5$ admet sur l'intervalle $]0\,;1]$ une unique solution qui sera notée α. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Bac 2017 :

On obtient alors le tableau de variations ci-dessous.



4. Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α sur $]0\,;+\infty[$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Bac 2017 :

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$g(x)=-2x^3+x^2-1.$$

1. **a.** Étudier les variations de la fonction g.

b. Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, et que α appartient à $[-1\,;0]$.

3. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$f(x)=\left(1+x+x^2+x^3\right)e^{-2x+1}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=\left(-2x^3+x^2-1\right)e^{-2x+1}$.

4. À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Bac 2011 :

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = xe^{x} - 1.$$

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier le sens de variation de f.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

En utilisant la question **1.**, montrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$.

Application aux suites

La continuité permet d'utiliser le théorème du point fixe qui permet de trouver la limite d'une suite convergente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction continue sur I (qui contient aussi tous les termes de la suite.

Métropole 2023 :

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.
Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n), définie par :

$$v_0 = 0,1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n, v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1,6x - 1,6x^2.$$

   a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

   b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$.

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

   b. Montrer que la suite (v_n) est convergente.
   On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

   c. Déterminer la valeur de ℓ.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....

Amérique du Nord 2023 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{11}{u_n}\right)$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A - Étude de la suite (u_n)

1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$$

   Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{11}\,;\,+\infty\right[$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.
5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

SUCCESSION D'EPREUVES INDEPENDANTES - BERNOULLI

Cours :

Formule des probabilités conditionnelles, probabilité totale

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Définir l'indépendance de deux événements.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Définir un schéma de Bernoulli, une épreuve de Bernoulli.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Formule de calculs des probabilités avec la loi Binomiale

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Résoudre un problème de conditionnement (1ère)

Révisions de première :

Probabilité de type « et » : $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$

Proba totale : $p(A) = \sum p(A \cap B)$

Sachant que : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

Amérique du Nord 2023 :

Les utilisateurs de vélo d'une ville sont classés en deux catégories disjointes :

- ceux qui utilisent le vélo dans leurs déplacements professionnels ;
- ceux qui utilisent le vélo uniquement pour leurs loisirs.

Un sondage donne les résultats suivants :

- 21 % des utilisateurs ont moins de 35 ans.
  Parmi eux, 68 % utilisent leur vélo uniquement pour leurs loisirs alors que les autres l'utilisent dans leurs déplacements professionnels ;
- parmi les 35 ans ou plus, seuls 20 % utilisent leur vélo dans leurs déplacements professionnels, les autres l'utilisent uniquement pour leurs loisirs.

On interroge au hasard un utilisateur de vélo de cette ville.
Dans tout l'exercice on considère les évènements suivants :

- J : « la personne interrogée a moins de 35 ans » ;
- T : « la personne interrogée utilise le vélo dans ses déplacements professionnels » ;
- $\overline{J}$ et $\overline{T}$ sont les évènements contraires de J et T.

1. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait moins de 35 ans et utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.
   On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Calculer la valeur exacte de la probabilité de T.
3. On considère à présent un habitant qui utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.
   Démontrer que la probabilité qu'il ait moins de 35 ans est $0,30$ à 10^{-2} près.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Centres étrangers 2023 :

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

Partie A

On estime que :

— lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,9$;

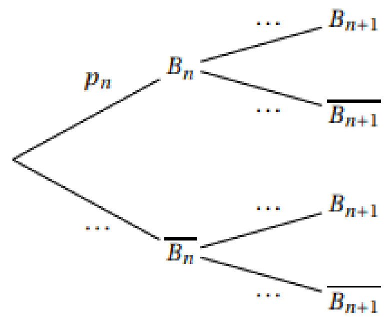
— lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est $0,4$.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel.
On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.

On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n \geqslant 0,8$.

b. À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ?

5. **a.** On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,8$.
Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

b. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.

c. En déduire la limite de la suite (p_n).

Polynésie 2023 :

Alice dispose de deux urnes A et B contenant chacune quatre boules indiscernables au toucher.
L'urne A contient deux boules vertes et deux boules rouges.
L'urne B contient trois boules vertes et une boule rouge.
Alice choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Elle obtient une boule verte.
La probabilité qu'elle ait choisi l'urne B est :

A. $\frac{3}{8}$ **B.** $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{5}{8}$

Amérique du Nord 2023 :

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.
Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

— 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux ;
— 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux ;
— les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

— 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables ;
— 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables ;
— 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

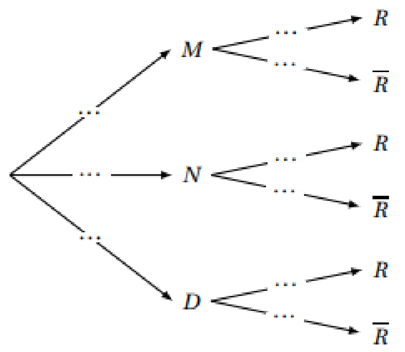
Les parties A *et* B *sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.*

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les évènements suivants :

— M : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux » ;
— N : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux » ;
— D : « Le déchet prélevé est dangereux » ;
— R : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note $\overline{R}$ l'évènement contraire de l'évènement R.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,010 5.

3. Déterminer la probabilité $P\left(M \cap \overline{R}\right)$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.

4. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $P(R) = 0{,}6514$.

5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

La réunion 2023 :

Une entreprise appelle des personnes par téléphone pour leur vendre un produit.

— L'entreprise appelle chaque personne une première fois :
  - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,6 ;
  - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,3.

— Si la personne n'a pas décroché au premier appel, on procède à un second appel :
  - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,3 ;
  - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,2.

— Si une personne ne décroche pas au second appel, on cesse de la contacter.

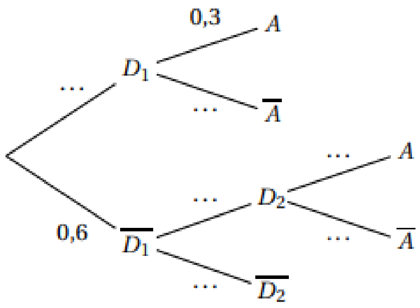
On choisit une personne au hasard et on considère les évènements suivants :

D_1 : « la personne décroche au premier appel » ;

D_2 : « la personne décroche au deuxième appel » ;

A : « la personne achète le produit ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2. En utilisant l'arbre pondéré, montrer que la probabilité de l'évènement A est
   $P(A) = 0,204$.
3. On sait que la personne a acheté le produit.
   Quelle est la probabilité qu'elle ait décroché au premier appel ?



....
....
....
....
....
....

La réunion 2023 :

Un commerçant vend deux types de matelas : matelas RESSORTS et matelas MOUSSE.
On suppose que chaque client achète un seul matelas.
On dispose des informations suivantes :

- 20 % des clients achètent un matelas RESSORTS.
  Parmi eux, 90 % sont satisfaits de leur achat.
- 82 % des clients sont satisfaits de leur achat.

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

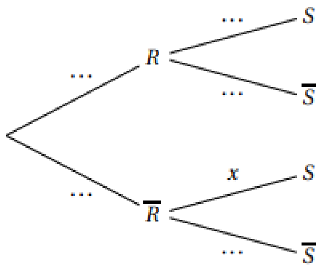
Partie A

On choisit au hasard un client et on note les évènements :

- R : « le client achète un matelas RESSORTS »,
- S : « le client est satisfait de son achat ».

On note $x = P_{\overline{R}}(S)$, où $P_{\overline{R}}(S)$ désigne la probabilité de S sachant que R n'est pas réalisé.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.
2. Démontrer que $x = 0,8$.
3. On choisit un client satisfait de son achat.
   Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS ?
   On arrondira le résultat à 10^{-2}.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Nouvelle calédonie 2023 :

Les 200 adhérents d'un club sont des filles ou des garçons. Ces adhérents pratiquent l'aviron ou le basket selon la répartition figurant dans le tableau ci-dessous.

	Aviron	Basket	Total
Filles	25	80	105
Garçons	50	45	95
Total	75	125	200

On choisit un adhérent au hasard et on considère les évènements suivants :

F : l'adhérent est une fille ;

A : l'adhérent pratique l'aviron.

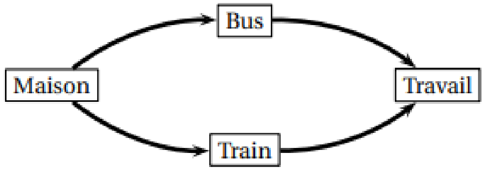
1. La probabilité de F sachant A est égale à :

   a. $\dfrac{25}{100}$ **b.** $\dfrac{25}{75}$ **c.** $\dfrac{25}{105}$ **d.** $\dfrac{75}{105}$

2. La probabilité de l'évènement $A \cup F$ est égale à :

   a. $\dfrac{9}{10}$ **b.** $\dfrac{1}{8}$ **c.** $\dfrac{31}{40}$ **d.** $\dfrac{5}{36}$

Pour se rendre à son travail, Albert peut utiliser au choix le bus ou le train.



La probabilité que le bus soit en panne est égale à b.
La probabilité que le train soit en panne est égale à t.
Les pannes de bus et de train surviennent de façon indépendante.

3. La probabilité p_1 que le bus ou le train soient en panne est égale à :

a. $p_1 = bt$ **b.** $p_1 = 1 - bt$ **c.** $p_1 = b + t$ **d.** $p_1 = b + t - bt$

4. La probabilité p_2 que Albert puisse se rendre à son travail est égale à :

a. $p_2 = bt$ **b.** $p_2 = 1 - bt$ **c.** $p_2 = b + t$ **d.** $p_2 = b + t - bt$

<u>Métropole 2023 :</u>

Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut procéder à un test sanguin dont le résultat est soit positif, soit négatif.
Dans une population, ce test donne les résultats suivants :

— Si un individu est allergique, le test est positif dans 97 % des cas;

— Si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7 % des cas.

Par ailleurs, 20 % des individus de la population concernée présentent un test positif.
On choisit au hasard un individu dans la population, et on note :

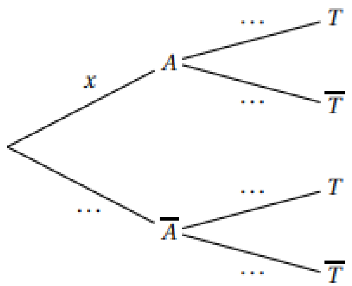
- A l'évènement « l'individu est allergique »;
- T l'évènement « l'individu présente un test positif ».

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.

2. **a.** Démontrer l'égalité : $p(T) = 0,927x + 0,043$.

b. En déduire la probabilité que l'individu choisi soit allergique.

3. Justifier par un calcul l'affirmation suivante :
« Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80 % de chances que cet individu soit allergique ».



<u>**Modéliser un problème par une loi Binomiale :**</u>

Ecrire la phrase suivante en remplaçant les mots soulignés par le contexte de l'exercice :

« L'expérience aléatoire est un schéma de Bernoulli. En effet, on répète **n** fois de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli.
L'épreuve de Bernoulli est a pour succès : **«<u>évènement succès</u> »** et pour échec : **«<u>évènement échec</u> »**. La probabilité du succès est <u>**p**</u>. X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès suit donc une loi binomiale de paramètres <u>**p** et **n**.</u> »

<u>Centres étrangers 2023 :</u>

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :

— l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres;

— la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à 0,8.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état.
Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Polynésie 2023 :

Dans cette partie, on s'intéresse uniquement aux personnes utilisant leur vélo dans leurs déplacements professionnels.

On admet que 30 % d'entre elles ont moins de 35 ans.
On sélectionne au hasard parmi elles un échantillon de 120 personnes auxquelles on va soumettre un questionnaire supplémentaire.
On assimile la sélection de cet échantillon à un tirage aléatoire avec remise.

On demande à chaque individu de cet échantillon son âge.

X représente le nombre de personnes de l'échantillon ayant moins de 35 ans.

………

………

………

………

………

………

Calculer avec la loi binomiale.

La probabilité d'avoir exactement k succès : $\boldsymbol{p(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}}$

- La probabilité d'avoir au plus k succès :

A la main : On décompose $p(X\leq k)=p(X=k)+p(X=k-1)+\cdots p(X=0)$

On calcule chacune des probas $p(X=k)$ avec la méthode D.

On peut utiliser l'évènement contraire pour aller plus vite :

$$p(X\leq k)=1-p(X>k)$$
$$=1-(p(X=k+1)+p(X=k+2)+\cdots+p(X=n)$$

- La probabilité d'avoir au moins k succès :

A la main : On décompose $p(X\geq k)=p(X=k)+p(X=k+1)+\cdots p(X=n)$

On calcule chacune des probas $p(X=k)$ avec la méthode D.

On peut utiliser l'évènement contraire pour aller plus vite :

$$p(X\geq k)=1-p(X<k)=1-p(X\leq k-1)$$
$$=1-(p(X=k-1)+p(X=k-2)+\cdots+p(X=0)$$

- La probabilité d'avoir plus de k succès :

A la main : On décompose $p(X>k)=p(X=k+1)+p(X=k+2)+\cdots p(X=n)$

On calcule chacune des probas $p(X=k)$ avec la méthode D.

On peut utiliser l'évènement contraire pour aller plus vite :

$$p(X>k)=1-p(X\leq k)=1-(p(X=k)+p(X=k-1)+\cdots+p(X=0)$$

- La probabilité d'avoir moins de k succès :

A la main : On décompose $p(X<k)=p(X=k-1)+p(X=k-2)+\cdots p(X=0)$

On calcule chacune des probas $p(X=k)$ avec la méthode D.

On peut utiliser l'évènement contraire pour aller plus vite :

$$p(X<k)=1-p(X\geq k)=1-(p(X=k)+p(X=k+1)+\cdots+p(X=0)$$

- La probabilité d'avoir entre k et k' succès :

A la main : On décompose $p(k\leq X\leq k')=p(X=k)+p(X=k+1)+\cdots p(X=k')$

On calcule chacune des probas $p(X=k)$ avec la méthode D.

Centres étrangers 2023 :

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont 7 sont bleues et les autres vertes.
On effectue trois tirages successifs avec remise. La probabilité d'obtenir exactement deux boules vertes est :

a. $\left(\frac{7}{10}\right)^2\times\frac{3}{10}$ **c.** $\binom{10}{2}\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2$

b. $\left(\frac{3}{10}\right)^2$ **d.** $\binom{3}{2}\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2$

Polynésie 2023 :

Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement.

Apres de nombreuses séances d'entraînement, l'entraineur estime maintenant que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de 0,75 et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les haies précédentes.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de haies franchies par l'athlète à l'issue d'un 400 mètres haies qui comporte 10 haies,

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
2. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies.
3. Calculer $p(X \geqslant 9)$, à 10^{-3} près.

....
....
....
....
....
....

Métropole 2023 :

Dans la suite de l'exercice, un joueur effectue 10 parties successives.
On assimile cette situation à un tirage aléatoire avec remise.
On rappelle que la probabilité de gagner une partie est de $\frac{12}{25}$.

3. La probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne exactement 6 parties est égale à :

a. 0,859 **b.** 0,671 **c.** 0,188 **d.** 0,187

4. On considère un entier naturel n pour lequel la probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne au plus n parties est de 0,207. Alors :

a. $n = 2$ **b.** $n = 3$ **c.** $n = 4$ **d.** $n = 5$

....
....
....
....

Amérique du Nord 2023 :

5. On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(3\,;\,p)$.

On sait que $P(X = 0) = \frac{1}{125}$. On peut affirmer que :

a. $p = \frac{1}{5}$ **b.** $P(X = 1) = \frac{124}{125}$
c. $p = \frac{4}{5}$ **d.** $P(X = 1) = \frac{4}{5}$

....
....
....
....

Amérique du nord 2023 :

82 % des clients sont satisfaits de leur achat.

On choisit 5 clients au hasard.

On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de clients satisfaits de leur achat parmi ces 5 clients.

a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.
b. Déterminer la probabilité qu'au plus trois clients soient satisfaits de leur achat.
On arrondira le résultat à 10^{-3}.

....
....
....
....

Nouvelle Calédonie 2023 :

On rappelle que la probabilité qu'un client donné prenne l'option PILOTE est égale à 0,42.
On considère un échantillon aléatoire de 40 clients. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de clients de l'échantillon prenant l'option PILOTE.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Donner sans justification ses paramètres.
2. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'au moins 15 clients prennent l'option PILOTE.

....
....
....
....

Amérique du Sud 2024 :

On considère la fonction ci-dessous nommée `proba` d'argument k écrite en langage Python.

```
def proba(k) :
  p=0
  for i in range(k+1) :
    p = p + binomiale(i,50,0.065)
  return p
```

Cette fonction utilise la fonction binomiale d'argument i,n et p, créée pour l'occasion, qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Déterminer la valeur numérique renvoyée par la fonction `proba` lorsqu'on saisit `proba(8)` dans la console Python. Interpréter ce résultat dans le contexte

....

....

....

....

....

....

Résoudre un problème de seuil

La loi binomiale suit les paramètres n et p avec n inconnu. On cherche à savoir pour quelle valeur de n, une probabilité dépasse un certain seuil.

La probabilité d'avoir au moins un succès est de :

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$$

Avec $p(X = 0) = \binom{n}{0} \times p^0 \times (1-p)^n$

On a donc au final :

$$p(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n$$

On cherche ensuite le « n » qui vérifie l'équation :

$$1 - (1-p)^n \geq seuil$$

On la résout en isolant la puissance de n et avec un logarithme ou alors on utiliser le menu « suites » de la calculatrice.

Amérique du Nord 2023 :

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,651 4.

Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.

a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.

b. Déterminer la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,999 9.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

La réunion 2023 :

Une entreprise appelle des personnes par téléphone pour leur vendre un produit.

On rappelle que, pour une personne donnée, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0, 204.

Soit n un entier naturel non nul.

On considère désormais un échantillon de n personnes.

Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins l'une des personnes de l'échantillon achète le produit soit supérieure ou égale à 0,99.

....

....

....

....

....

....

REPRESENTATIONS PARAMETRIQUES ET EQUATIONS CARTESIENNES

Cours :

Donner la formule générale de la représentation paramétrique d'une droite :

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Donner la formule générale de l'équation cartésienne d'un plan :

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Déterminer la représentation paramétrique d'une droite :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur directeur et $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ un point de (d)

L'équation de (D) est : $\begin{cases} \boldsymbol{x = at + x_A} \\ \boldsymbol{y = bt + y_A} \\ \boldsymbol{z = ct + z_A} \end{cases}$ avec t un réel

Amérique du Nord 2023 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm, on considère les points

$$D(3\ ;1\ ;5),\qquad E(3\ ;-2\ ;-1),\qquad F(-1\ ;2\ ;1),\qquad G(3\ ;2\ ;-3).$$

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FG).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

La réunion 2023 :

On considère le point A(1 ; 1 ; 0) et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. On note (d) la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$.
Déterminer une représentation paramétrique de (d).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Polynésie 2023 :

- la droite (d') de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -6-8t \\ y = 4t, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}. \\ z = 6+5t \end{cases}$$

Un vecteur directeur de la droite (d') est :

a. $\vec{v_1}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ **b.** $\vec{v_2}\begin{pmatrix} -14 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$ **c.** $\vec{v_3}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ **d.** $\vec{v_4}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Polynésie 2022 :

équation cartésienne du plan (CFI) est : $x+2y+2z-3=0$.

Le point G a pour coordonnées (1 ; 1 ; 1)

On note d la droite passant par G et orthogonale au plan (CFI).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Déterminer l'équation cartésienne d'un plan :

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal et $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ un point du plan (P)

L'équation de (P) est : $ax + by + cz + d = 0$ $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$

Métropole 2023 :

le plan $\mathscr{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x+y-z+2=0$,

Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal au plan $\mathscr{P}_1$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Métropole 2023 :

- le plan $\mathscr{P}_2$ passant par le point B(1 ; 1 ; 2) et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$.

....

....

Centres étrangers 2023 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points

A(−1 ; −3 ; 2), B(3 ; −2 ; 6) et C(1 ; 2 ; −4).

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathscr{P}$.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.

b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan P est $13x-16y-9z-17=0$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Amérique du Nord 2023 :

On considère les points A(−1 ; 2 ; 5), B(3 ; 6 ; 3), C(3 ; 0 ; 9) et D(8 ; −3 ; −8).
On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Une équation cartésienne du plan (BCD) est :

a. $2x+y+z-15=0$ **b.** $9x-5y+3=0$

c. $4x+y+z-21=0$ **d.** $11x+5z-73=0$

....

....

....

....

....

....

Polynésie 2023 :

Le plan d'équation $x=1$ a pour vecteur normal :

a. $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{n_4}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

....

....

Centres étrangers 2022 :

A(2 ; 0 ; 3), B(0 ; 2 ; 1), C(−1 ; −1 ; 2) et D(3 ; −3 ; −1).

Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).

....

....

....

....

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan ou sur une droite.

Sur un plan :

Projeté orthogonal $H(x_H\ ;\ y_H\ ;\ z_H)$ d'un point $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ sur un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et d'équation $ax+by+cz+d=0$

1) Trouver une représentation paramétrique de la droite (d) passant par B et de vecteur directeur, le vecteur normal du plan. (Elle sera donc orthogonale au plan)

$$\begin{cases} x = at + x_B \\ y = bt + y_B \\ z = ct + z_B \end{cases}$$

2) Injecter la représentation de la droite dans l'équation cartésienne du plan pour trouver t.
3) Remplacer t dans la représentation paramétrique de la droite pour trouver les coordonnées du projeté.

Centres étrangers 2023 :

une équation cartésienne du plan (MNP) est $5x-8y+4z=0$.

6. On rappelle que le point F a pour coordonnées $F(1;0;1)$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (MNP) et passant par le point F.

7. On note L le projeté orthogonal du point F sur le plan (MNP).
Montrer que les coordonnées du point L sont : $L\left(\frac{4}{7};\frac{24}{35};\frac{23}{35}\right)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

Amérique du Nord 2023 :

$D(8;-3;-8)$.

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x-2y-2z+15=0$.
On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
On peut affirmer que :

a. $H(-2;17;12)$
b. $H(3;7;2)$
c. $H(3;2;7)$
d. $H(-15;1;-1)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Sur une droite :

Projeté orthogonal $H(x_H\,;\,y_H\,;\,z_H)$ d'un point $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ sur une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et d'équation $\begin{matrix}\boldsymbol{x=at+x_A}\\\boldsymbol{y=bt+y_A}\\\boldsymbol{z=ct+z_A}\end{matrix}$

Les coordonnées de H doivent vérifier le système :

- $\overrightarrow{BH}.\vec{u}=0$ soit $a(x_H-x_B)+b(y_H-y_B)+c(z_H-z_B)=0$ (1)
- H appartient à la droite soit $\begin{matrix}\boldsymbol{x_H=at+x_A}\\\boldsymbol{y_H=bt+y_A}\\\boldsymbol{z_H=ct+z_A}\end{matrix}$ **(2)**

Métropole 2023 :

$D(4;-1;-2)$.

On note Δ la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl}x&=&0\\y&=&2+t\\z&=&-1+t\end{array}\right.,\text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ.
Montrer que H est le point de Δ associé à la valeur $t=-2$ dans la représentation paramétrique de Δ donnée ci-dessus.

....

....

....

....

....

....

....

....

Résoudre des problèmes de géométrie :

Déterminer si trois vecteurs forment une base :

On étudie si les trois vecteurs sont non-coplanaires :

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ on doit avoir $\vec{w} = \mu \times \vec{u} + \lambda \times \vec{v}$ impossible.

$$\begin{cases} x'' = \mu \times x + \lambda \times x' \\ y'' = \mu \times y + \lambda \times y' \\ z'' = \mu \times z + \lambda \times z' \end{cases}$$ Le système n'a pas de solutions.

Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée.

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base. Trouver les coordonnées d'un vecteur $\vec{a}$ revient à chercher les réels x, y et z qui vérifient :

$$\vec{a} = x \times \vec{u} + y \times \vec{v} + z \times \vec{w}$$

Alignement/colinéarité/parallélisme :

$\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ ssi $\vec{u} = k \times \vec{v}$

On trouve k en résolvant un système.

A, B et C sont alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires

On peut également, si on a la représentation paramétrique de la droite (AB), Résoudre un système pour montrer que C est un point de (AB)

(AB) est parallèle à (CD) ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires

On peut également, si on a la représentation paramétrique de la droite (AB) et celle de (CD) extraire un vecteur directeur de chaque droite et vérifier que les vecteurs sont colinéaires.

Centres étrangers 2023 :

A(3; 0; 1), B(2; 1; 2) et C(−2 ; −5 ; 1).

Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Polynésie 2023 :

- la droite (d') de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -6-8t \\ y = 4t, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}. \\ z = 6+5t \end{cases}$$

Lequel des quatre points suivants appartient à la droite (d') ?

a. $M_1(50 ; -28 ; -29)$ **b.** $M_2(-14 ; -4 ; 1)$
c. $M_3(2 ; -4 ; -1)$ **d.** $M_4(-3 ; 0 ; 3)$

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Métropole 2023 :

- la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 2+2t \end{cases}$

Montrer que le point $B(-1 ; 3 ; 0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Coplanarité :

Les points A,B, C et D sont coplanaires ssi $\overrightarrow{AB} = \mu \times \overrightarrow{AC} + \lambda \times \overrightarrow{AD}$

On peut également si on a une équation du plan (ABC) chercher si les coordonnées de D vérifient l'équation du plan (ABC)

Polynésie 2023 :

- le point $A(1 ; -1 ; -1)$;
- le plan $\mathscr{P}_1$, d'équation : $5x+2y+4z = 17$;

Vérifier que A n'appartient pas à $\mathscr{P}_1$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Métropole 2023 :

le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $3x+2y+z-4 = 0$;

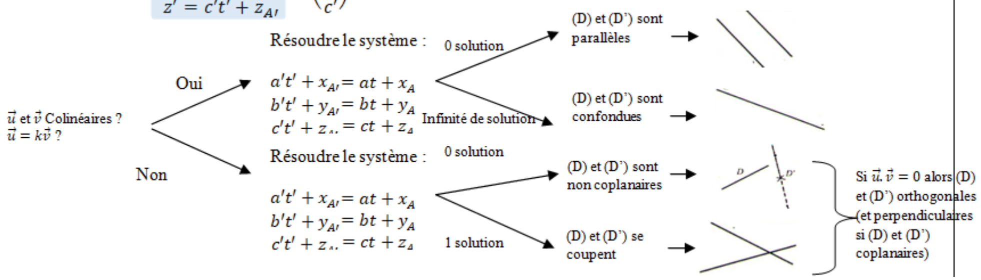
Lequel des points suivants appartient au plan $\mathscr{P}$?

a. $R(1\,;\,-3\,;\,1)$; **b.** $S(1\,;\,2\,;\,-1)$; **c.** $T(1\,;\,0\,;\,1)$; **d.** $U(2\,;\,-1\,;\,1)$.

Position relative de droites et orthogonalité :

Soient deux droites (D) d'équation $\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur directeur

(D') d'équation $\begin{cases} x' = a't' + x_{A'} \\ y' = b't' + y_{A'} \\ z' = c't' + z_{A'} \end{cases}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ un vecteur directeur



Polynésie 2023 :

L'espace est muni d'un repère orthonormée $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

On considère :

- d_1 la droite passant par le point H(2; 3; 0) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- d_2 la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2k-3 \\ y = k \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Polynésie 2023 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

On considère :

- le point A(1 ; −1 ; −1) ;
- la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = 3-2t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

On note H le point de coordonnées (3 ; −1 ; 1).

Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

La réunion 2023 :

On considère les droites (d_1) et (d_2) dont des représentations paramétriques sont respectivement :

$$(d_1)\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+r \\ y &=& 1+r \\ z &=& -r \end{array}\right. \quad (r\in\mathbb{R}) \quad \text{et } (d_2)\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-s \\ y &=& -1+s \\ z &=& 2-s \end{array}\right. \quad (s\in\mathbb{R})$$

Les droites (d_1) et (d_2) sont :

a. sécantes. **b.** strictement parallèles.
c. confondues. **d.** non coplanaires.

....
....
....
....
....
....
....
....

Position relative de droites et de plans et orthogonalité :

Soient un plan (P) d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal et (D) d'équation $\left\{\begin{array}{l} x' = a't + x_A \\ y' = b't + y_A \\ z' = c't + z_A \end{array}\right.$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ un vecteur directeur

Injecter l'équation de (D) dans (P) : $a(a't+x_A)+b(b't+x_A)+c(c't+x_A)+d=0$?

Toujours vraie → (D) inclus dans (P)

Vraie pour une valeur de t → (D) et (P) sécants

Toujours Faux → (D) et (P) parallèles

Si $\vec{n} = k\vec{v}$ alors (D) et (P) Orthogonaux

Dans le cas où, la droite coupe le plan, les coordonnées du point d'intersection sont les solutions du système. On remplace t par sa valeur, trouvée précédemment, dans l'équation de la droite.

Polynésie 2023 :

d_2 la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2k-3 \\ y &=& k \\ z &=& 5 \end{array}\right. \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

On considère le plan P passant par le point H et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$.

On admet qu'une équation cartésienne de ce plan est :

$$5x+4y-z-22=0.$$

Démontrer que l'intersection du plan P et de la droite d_2 est le point M$(3;3;5)$.

....
....
....
....
....
....

La réunion 2023 :

On considère le plan (P) dont une équation cartésienne est :

$$2x-y+z-1=0.$$

On considère la droite (Δ) dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+u \\ y &=& 4+u \\ z &=& 1-u \end{array}\right. \quad (u\in\mathbb{R})$$

La droite (Δ) est :

a. sécante et non orthogonale au plan (P). b. incluse dans le plan (P).
c. strictement parallèle au plan (P). **d.** orthogonale au plan (P).

....
....
....
....
....
....

Métropole 2023 :

une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $2x + y - z - 3 = 0$.

On note Δ la droite de représentation paramétrique

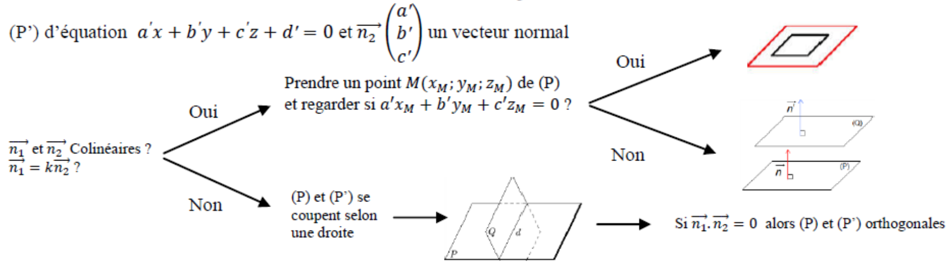
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 2+t \\ z & = & -1+t \end{array}\right., \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que la droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

Position relative de plans (hors programme) :

Soient deux plans (P) d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal

(P') d'équation $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ un vecteur normal



Polynésie 2023 :

- le plan $\mathscr{P}_1$, d'équation : $5x + 2y + 4z = 17$;
- le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation : $10x + 14y + 3z = 19$;
- la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & -t \\ z & = & 3-2t \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

1. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.
2. Démontrer que $\mathscr{D}$ est la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

Métropole 2023 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

- le plan $\mathscr{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x + y - z + 2 = 0$,
- le plan $\mathscr{P}_2$ passant par le point $B(1 ; 1 ; 2)$ et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

DEMONSTRATION : EQUATION CARTESIENNE D'UN PLAN :

LOGARITHME NEPERIEN

Cours :

Propriétés algébriques du logarithme :

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Dérivée du logarithme et tableau de variation.

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Limite en 0 et limite en $+\infty$?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Limites des croissances comparées :

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Utiliser les propriétés algébriques pour :

Transformer une écriture :

Opérations : Pour tout réels a et b > 0 et pour tout entier relatif n

Multiplication : $\boldsymbol{ln(a \times b) = ln\ a + ln\ b}$ Division : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \boldsymbol{ln\ a - ln\ b}$

Inverse : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \boldsymbol{-ln\ (a)}$

Puissance : $\boldsymbol{ln(a^n) = n \times ln(a)}$ Racine : $\boldsymbol{ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \times ln(a)}$

Centres étrangers 2022 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 4\ln(3x)$.
Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a :

a. $f(2x) = f(x) + \ln(24)$ **b.** $f(2x) = f(x) + \ln(16)$
c. $f(2x) = \ln(2) + f(x)$ **d.** $f(2x) = 2f(x)$

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Amérique du Nord 2022 :

Affirmation 1 : Pour tout réel x : $1 - \frac{1-e^x}{1+e^x} = \frac{2}{1+e^{-x}}$.

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Amérique du Nord 2022 :

Le réel a est définie par $a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$ est égal à :

a. $1 - \frac{1}{2}\ln(3)$ **b.** $\frac{1}{2}\ln(3)$ **c.** $3\ln(3) + \frac{1}{2}$ **d.** $-\frac{1}{2}\ln(3)$

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Résoudre une équation :

Attention au domaine de définition pour les logarithmes

$\ln(a(x)) = k \leftrightarrow a(x) = e^k$

$\ln(a(x)) = \ln(b(x)) \leftrightarrow a(x) = b(x)$

Polynésie 2023 :

Affirmation : L'équation $(2e^x - 6)(e^x + 2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution dans $\mathbb{R}$.

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

La réunion 2023 :

On considère l'équation $[\ln(x)]^2 + 10\ln(x) + 21 = 0$, avec $x \in]0\,;\,+\infty[$.
Le nombre de solutions de cette équation est égal à :

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** une infinité.

Métropole 2022 :

L'équation $e^{2x} + e^{x} - 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a. trois solutions ; **b.** deux solutions ; **c.** une seule solution ; **d.** aucune solution.

Métropole 2022 :

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$.
Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 2022$

a. n'admet aucune solution.
b. admet exactement une solution.
c. admet exactement deux solutions.
d. admet une infinité de solutions.

Amérique du Nord 2022 :

On note (E) l'équation suivante $\ln x + \ln(x - 10) = \ln 3 + \ln 7$ d'inconnue le réel x.

a. 3 est solution de (E).
b. $5 - \sqrt{46}$ est solution de (E).
c. L'équation (E) admet une unique solution réelle.
d. L'équation (E) admet deux solutions réelles.

Résoudre une inéquation :

Idem pour $\ln(a(x)) >$ (ou $\geq$ ou $< ou \leq$) $\ln(b(x))$

Polynésie 2022 :

Les nombres entiers n solutions de l'inéquation $(0,2)^n < 0,001$ sont tous les nombres entiers n tels que :

a. $n \leqslant 4$	**b.** $n \leqslant 5$	**c.** $n \geqslant 4$	**d.** $n \geqslant 5$

Centres étrangers 2023 :

L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$ est :

a. $S =]-\infty\,;\,-2[\cup]1\,;\,+\infty[$
b. $S =]1\,;\,+\infty[$
c. $S = \emptyset$
d. $S =]-1\,;\,1[$

Etudier une fonction logarithme pour résoudre un problème :

Calcul de dérivée :

Centres étrangers 2023 :

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.
L'expression de la fonction dérivée de f est :

a. $f'(x) = 2x\ln x$.
b. $f'(x) = x(2\ln x + 1)$.
c. $f'(x) = 2$.
d. $f'(x) = x$.

Polynésie 2022 :

On considère la fonction g définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(x^2+x+1\right).$$

Pour tout nombre réel x strictement positif :

a. $g'(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ **b.** $g'(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$

c. $g'(x) = \ln(2x+1)$ **d.** $g'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

....

....

Ensemble de définition :

Centres étrangers 2023 :

On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{2x+4}\right)$.

La fonction g est définie sur :

a. $\mathbb{R}$ **c.** $]-\infty\,;\,-2[\cup]1\,;\,+\infty[$

c. $]-2\,;\,+\infty[$ **d.** $]-2\,;\,1[$

....

....

....

....

Centres étrangers 2022 :

La fonction $x \longmapsto \ln\left(-x^2-x+6\right)$ est définie sur

a. $]-3\,;\,2[$ **b.** $]-\infty\,;\,6]$

c. $]0\,;\,+\infty[$ **d.** $]2\,;\,+\infty[$

....

....

....

....

Limites :

Polynésie 2022 :

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2[1-\ln(x)]$.
Parmi les quatre affirmations suivantes, laquelle est correcte?

a. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$	**b.** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$	**c.** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$	**d.** La fonction g n'admet pas de limite en 0.

....

....

....

....

Métropole 2022 :

La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x}{3x^2+1}$ est égale à :

a. $\dfrac{2}{3}$; **b.** $+\infty$; **c.** $-\infty$; **d.** 0.

....

....

....

....

....

....

Centres étrangers 2022 :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}_g$ admet :

a. une asymptote verticale et une asymptote horizontale.

b. une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

c. aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale.

d. aucune asymptote verticale .et aucune asymptote horizontale.

....

....

....

....

....

....

....

....

Equation de tangentes :

La réunion 2023 :

On considère la fonction k définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$k(x) = 3\ln(x) - x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction k dans un repère orthonormé.
On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.
Une équation de T est :

a. $y = (3-\mathrm{e})x$ **b.** $y = \left(\dfrac{3-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right)x$

c. $y = \left(\dfrac{3}{\mathrm{e}} - 1\right)x + 1$ **d.** $y = (\mathrm{e}-1)x + 1$

....

....

....

....

....

....

Convexité :

Métropole 2022 :

Soit la fonction g définie pour tout réel x strictement positif par :

$$g(x) = x\ln(x) - x^2$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

a. La fonction g est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$. **b.** La fonction g est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.
c. La courbe $\mathscr{C}_g$ admet exactement un point d'inflexion sur $]0\,;\,+\infty[$. **d.** La courbe $\mathscr{C}_g$ admet exactement deux points d'inflexion sur $]0\,;\,+\infty[$.

....

....

....

....

1) Problème d'extremum : Faire un tableau de variation
2) Problème de convexité : Dérivée seconde

Polynésie 2023 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + 2x + 2\right)$.
Affirmation : La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3\,;\,1]$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

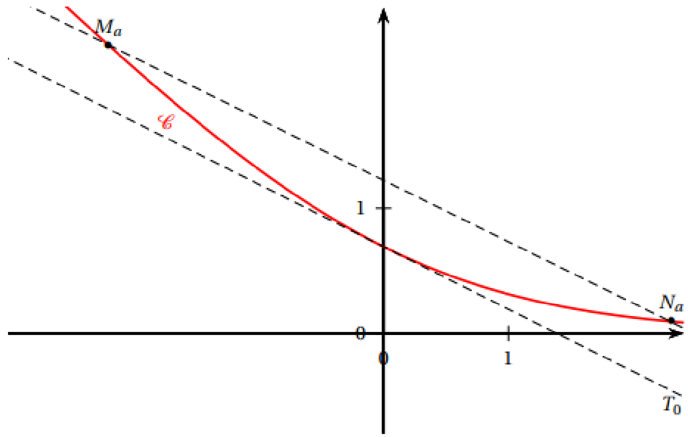
....

Métropole 2023 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
La courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous.



1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.

c. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{-1}{1 + \mathrm{e}^x}$.

d. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On note T_0 la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

a. Déterminer une équation de la tangente T_0.

b. Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire que, pour tout nombre réel x, on a :

$$f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x + \ln(2).$$

3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives $-a$ et a.

On a donc : $M_a\left(-a\,;\,f(-a)\right)$ et $N_a\left(a\,;\,f(a)\right)$.

a. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) - f(-x) = -x$.

b. En déduire que les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles.

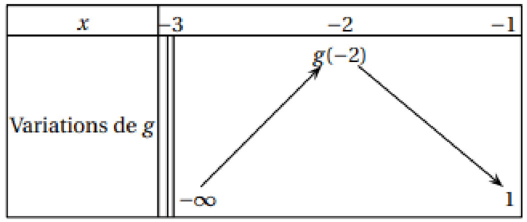
3) Recherche de solution à une équation insoluble : TVI

<u>Polynésie 2023 :</u>

On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3\,;\,-1]$ par :

$$g(x) = \ln(0{,}5x + 1{,}5) - x.$$

a. Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g (limites, variations, image de -1)



b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

Centres étrangers 2023 :

On considère la fonction f définie sur $]-1,5\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x+3) - 1.$$

On considère la fonction g définie sur $]-1,5\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-1,5$.
   On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $]-1,5\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Démontrer que, dans l'intervalle $]-0,5\,;\,+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Métropole 2023 :

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
2. On admet que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - 8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$.
   En déduire la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Montrer que, pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2-4\right)}{x}$.
4. Étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.
   On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
5. Démontrer que, sur l'intervalle $]0\,;2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α).
6. On admet que, sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de β).
   En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
7. Pour tout nombre réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k.$$

   En s'aidant du tableau de variations de f, déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Nouvelle Calédonie 2023 :

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Démontrer que la limite de la fonction f en 0 est égale à 0.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$

$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$

   b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.
   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (On admettra que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f'(x) = 2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$.)
4. **a.** Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
   b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
5. **a.** En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.$$

   En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.
   b. En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f.

Centres étrangers 2022 :

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 1 + x - \mathrm{e}^{0,5x-2}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b. Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = 1 + 0,5x\left(2 - \dfrac{\mathrm{e}^{0,5x}}{0,5x} \times \mathrm{e}^{-2}\right)$.

En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. **a.** Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.

b. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ est l'intervalle $]4 + 2\ln(2)\,;\,+\infty[$.

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On fera figurer la valeur exacte de l'image de $4 + 2\ln(2)$ par f.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$.

4) Suites de logarithmes

Métropole 2022 :

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - x\ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = -\ln x$.

b. En déduire les variations de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = u_n - u_n\ln u_n \text{ pour tout entier naturel } n, \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0,5\,;\,1]$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0,5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

2. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_k(x) = kx - x\ln x.$$

1. Pour tout nombre réel k, montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = \mathrm{e}^{k-1}$.

2. Vérifier que, pour tout nombre réel k, on a : $x_k = y_k$.

Nouvelle calédonie 2022 :

On considère une suite (b_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$b_{n+1} = b_n + \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right).$$

On peut affirmer que :

a. la suite (b_n) est croissante.

b. la suite (b_n) est décroissante.

c. la suite (b_n) n'est pas monotone.

d. le sens de variation de la suite (b_n) dépend de b_0.

Polynésie 2023 :

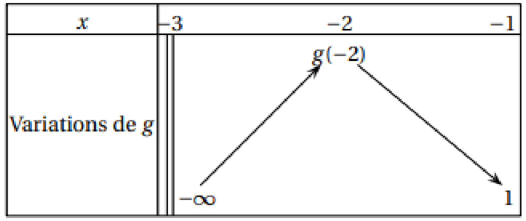
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.
   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leqslant -1$.
   c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
   d. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3\,;\,-1]$ par :

$$g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x.$$

   a. Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g (limites, variations, image de -1)



   b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

3. Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (v_n) définie pour tout $\in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = \ln(0,5u_n + 1,5)\,.$$

   a. En utilisant la formule donnée à la question **1. a.**, démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\ln(0,9)$.
   b. Soit n un entier naturel.
   Démontrer que $u_n = v_n$ si, et seulement si $g(u_n) = 0$.
   c. Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.
   d. En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $v_k = u_k$.

FONCTIONS SINUS ET COSINUS :

Cours :

Dérivées de sinus et cosinus :

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Tableau de variations des fonctions sur [0 ; 2π[

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Courbes représentatives :

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Résoudre une équation/inéquation :

Résoudre une équation :

1) Transformer l'expression de façon à obtenir une expression du type : $\cos(ax+b)=\cos y$ (resp. $\sin(ax+b)=\sin y$. On pourra utiliser un cercle trigonométrique pour déterminer sin y.

2) Dans le cas d'une équation $\cos(ax+b)=\cos y$:

L'équation se ramène à deux équations : $ax+b=y+2k\pi$ ou $ax+b=-y+2k\pi$

Les solutions sont alors $x=\frac{y-b+2k\pi}{a}$ ou $x=\frac{-y-b+2k\pi}{a}$

Dans le cas d'une équation $\sin(ax+b)=\sin y$:

L'équation se ramène à deux équations : $ax+b=y+2k\pi$ ou $ax+b=\pi-y+2k\pi$

Les solutions sont alors $x=\frac{y-b+2k\pi}{a}$ ou $x=\frac{\pi-y-b+2k\pi}{a}$

3) Enfin, on identifie l'intervalle I sur lequel on cherche à résoudre l'équation.

On calcule donc les différentes valeurs de x appartenant à I en faisant varier k de -2 à 2 par pas de 1.

Si pour k = -1 x n'appartient pas à I inutile de calculer pour k = -2 (de même pour k = 1)…

Avenir 2019 :

Combien de solutions appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation $2(\sin x)^2+3\cos x=3$ possède-t-elle ?

a. 0; **b.** 1; **c.** 2; **d.** 3.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Avenir 2024 :

Sachant que $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$**, combien vaut** $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ **?**

A. $1-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ B. $-\frac{\sqrt{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Exos pour adultes :

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle I indiqué :

1) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0;\quad I=\mathbb{R}$

2) $\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1;\quad I=\mathbb{R}$

3) $\sin x=\cos x;\quad I=\mathbb{R}$

4) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0;\quad I=[-\pi;\pi]$

5) $2\cos\left(\pi-\frac{x}{2}\right)=-1;\quad I=[-2\pi;2\pi]$

6) $\cos(3x)=\frac{1}{2};\quad I=[0;2\pi]$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Résoudre une inéquation :

1) Transformer l'expression de façon à obtenir une expression du type : $\cos(ax+b) < \cos y$ (resp. $\sin(ax+b) < \sin y$). On pourra utiliser un cercle trigonométrique pour déterminer sin y.

2) Résoudre l'égalité associée à cette inéquation (problème G)

3) Classer les solutions par ordre croissants. Pour chaque intervalle de x compris entre chacune des solutions et l'intervalle de résolution, en déduire un encadrement de ax+b.

4) Avec un cercle, on détermine un encadrement de cos(ax+b) sur chaque intervalle défini précédemment. On en déduit les intervalles solutions de l'inéquation.

Avenir 2024 :

Les angles $\theta \in]-\pi;\pi]$ qui sont solutions de l'inéquation $\cos(2\theta) > 0$ sont dans l'intervalle :

A. $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

B. $]0;\pi]$

C. $]-\pi;\pi[$

D. $\left[-\pi;-\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

....

....

....

....

....

....

Avenir 2024 :

Soit un angle $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(3\theta) > 0$.
Parmi les angles proposés, lequel peut être θ ?

A. $-\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $-\frac{\pi}{8}$

....

....

....

....

....

....

Exos pour adultes :

1) Résoudre l'inéquation $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans chacun des intervalles suivants :

a) $I = [0; 2\pi]$ b) $I = [-\pi; \pi]$ c) $I = \mathbb{R}$

2) Résoudre l'inéquation $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans chacun des intervalles suivants :

a) $I = [0; \pi]$ b) $I = [-\pi; \pi]$ c) $I = \mathbb{R}$

3) Résoudre les inéquations suivantes dans $[-\pi; \pi]$ ⚠ penser à factoriser !

a) $4\sin^2 x - 3 \leqslant 0$ b) $2\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Faire une étude de fonction

Dérivation :

Question 36 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$. par : $f(x) = \cos(3x)\mathrm{e}^{-2x}$.
La fonction dérivée de f en $x \in \mathbb{R}$ est

a. $f'(x) = -\mathrm{e}^{-2x}(3\sin(3x) + 2\cos(3x))$

b. $f'(x) = -3\mathrm{e}^{-2x}(\sin(3x) + \cos(3x))$

c. $f'(x) = -Z\mathrm{e}^{-2x}(\sin(3x) + \cos(3x))$

d. $f'(x) = -\mathrm{e}^{-2x}(3\sin(3x) - 2\cos(3x))$

....

....

....

....

....

....

Avenir 2024 :

On rappelle que $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
Parmi les fonctions proposées, laquelle correspond à la dérivée de la fonction tan **?**

A. $-\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ B. $\dfrac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$ C. $1 + \tan(x)$ D. $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$

....

....

....

....

Limites :

Avenir 2024 :

Que vaut la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ **?**

A. 0 B. 1

C. $+\infty$ D. Cette limite n'existe pas

....

....

Etude complète :

Exercice 1 :

f est la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2}{2 + \cos x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que la fonction f est paire et déterminer sa période.
3) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0; \pi]$.
4) Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi; \pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-\pi; 3\pi]$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 2 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(1 + \cos\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}$

1) Déterminer la période et la parité de la fonction f.
2) Déterminer l'intervalle d'étude de la fonction f.
3) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervelle $[0, 2\pi]$
4) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-4\pi; 4\pi]$

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \sin 2x + 2\cos x$

1) Visualiser la courbe sur votre calculatrice et faites une conjecture sur la périodicité de la fonction f puis démontrer cette conjecture.
2) Montrer que l'on peut étudier la fonction f sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ puis montrer que :

$$f'(x) = -2(\sin x + 1)(2\sin x - 1)$$

3) Étudier les variations sur I puis dresser le tableau de variation sur I.
4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède exacttement deux solutions dans I et donner un encadrement à 10^{-1} de chacune de ces solutions. On note α et β ces solutions avec $\alpha < \beta$.
5) En déduire les variations sur I de la fonction g définie par : $g(x) = 2x - \cos 2x + 4\sin x$

PRIMITIVES ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Cours :

Définition d'une primitive, la primitive, les primitives de f ?

....

....

Formules de calcul des primitives usuelles ? (x^n ; $\frac{1}{\sqrt{x}}$; e^x; $\sin(x)$; $\cos(x)$)

....

....

....

....

....

....

Formules des fonctions composées

....

....

....

....

....

....

Solutions des équations différentielles de la forme $y' = ay$ et $y' = ay + b$

....

....

....

....

Calculer une primitive/la primitive

Vérifier que c'est une primitive :

Dériver F(x). Si F'(x) = f(x) alors F est une primitive de f.

Graphiquement : Si $f(x) < 0$ alors F est décroissante

Si $f(x) > 0$ alors F est croissante

Amérique du Nord 2024 :

Soit a un réel strictement positif.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = a\ln(x).$$

Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a[x\ln(x) - x]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

....

....

....

....

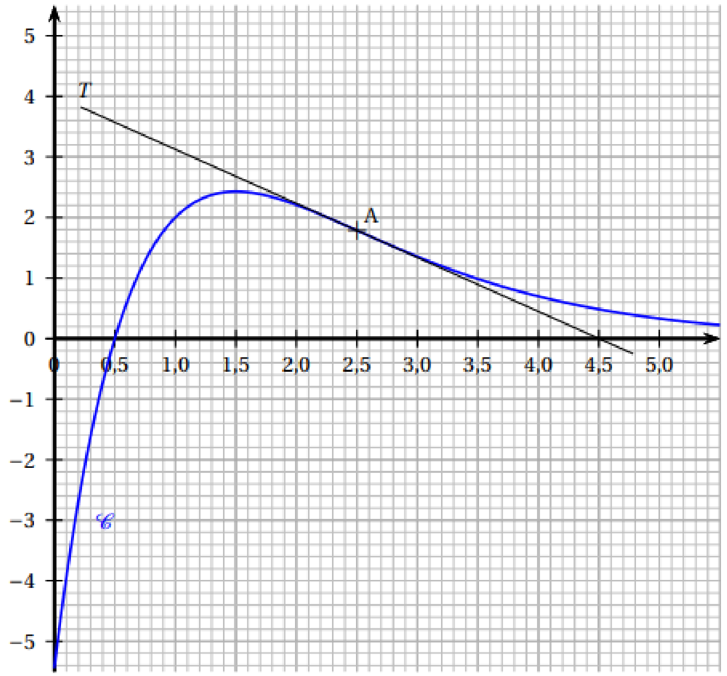
....

....

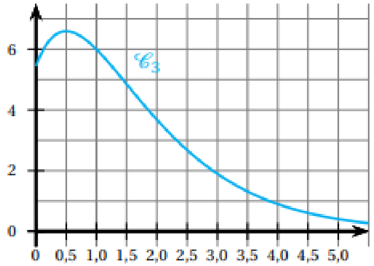
Asie 2024 :

On considère une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$, représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous.

La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\frac{5}{2}$.



La courbe $\mathscr{C}_3$ ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur $[0\ ;\ +\infty[$ d'une primitive de la fonction f ? Justifier.



<u>Asie 2024 :</u>

Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, est définie par

$$f(x) = (4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1}.$$

On considère une fonction F définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.

a. Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

<u>Calculer une primitive :</u>

<u>Cas d'une somme de fonctions usuelles</u>

1) Décomposer la fonction étudiée en somme de fonctions usuelles

2) Utiliser le tableau pour faire correspondre à chaque fonction usuelle sa primitive et les additionner.

<u>Cas de fonctions composées</u>

1) Utiliser le tableau des primitives pour repérer la fonction composée : repérer les racines, les quotients, les exponentielles,…bref ce qui caractérise chaque ligne du tableau.

2) Identifier la fonction u(x) présente et calculer la dérivée u'(x) correspondante.

3) Si la dérivée u'(x) n'est pas présente dans la fonction, la faire apparaitre en multipliant et divisant par un réel de façon à faire apparaître u'(x).

4) Utiliser le tableau pour en déduire une primitive de la fonction.

<u>Métropole 2023 :</u>

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2-3}.$$

Une des primitives F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est définie par :

<u>Centres étrangers 2022 :</u>

On considère la fonction f définie sur $]-1\ ;\ 1[$ par

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

Une primitive de la fonction f est la fonction g définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$ par :

Centres étrangers 2022 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x+1}$.
La seule primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f telle que $F(0) = 1$ est la fonction :

....

....

....

....

....

....

Avenir 2024 :

Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{2}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ peut être définie par :

....

....

....

....

Avenir 2024 – 2

Déterminer la primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, qui s'annule en 1, de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

....

....

....

....

....

....

Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$

1) Transformer l'équation pour la mettre sous la forme y' = ay + b

2) Les solutions sont de la forme $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ on identifie a et b à l'aide de l'équation

3) On détermine C en résolvant l'équation du premier degré $y(x_0) = y_0$ (si une condition est donnée)

Concours avenir 2024 :

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\frac{1}{4}y' + \frac{1}{4}y = 2$ sont les fonctions définies par :

a. $f(x) = Ce^{-x} + 8$, où $C \in \mathbb{R}$
b. $f(x) = Ce^{-\frac{x}{4}} + 2$, où $C \in \mathbb{R}$
c. $f(x) = Ce^{-\frac{x}{4}} + 8$, où $C \in \mathbb{R}$
d. $f(x) = Ce^{-x} + 2$, où $C \in \mathbb{R}$

....

....

....

....

Concours avenir 2024 :

La solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 7y + 7$ avec $f(2) = -1$ est :

a. $f(x) = e^{7x} - 1$ **b.** $f(x) = -1$ **c.** $f(x) = e^{-7x} - 1$ **d.** $f(x) = e^{7x-14} - 1$

....

....

....

....

....

....

Métropole 2024 :

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en mg. L^{-1}, dans la piscine.
On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' = -0{,}08y + \frac{q}{50}$$

où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = Ce^{-0{,}08x} + \frac{q}{4}$ où C est une constante réelle.

2. **a.** Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.

b. On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à 0,7 mg.L^{-1}.
On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de 2 mg.L^{-1}.
Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Polynésie 2024 :

La solution f de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ telle que $f(0) = 1$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

A. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$

B. $f(x) = -\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$

C. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$

D. $f(x) = -\dfrac{10}{3}\mathrm{e}^{-3x} - \dfrac{7}{3}$

....

....

....

....

Polynésie 2024 :

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad 3y' + y = 1.$$

Affirmation E : La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$$

est solution de l'équation différentielle (E) avec $g(0) = 5$.

....

....

....

....

....

....

....

....

Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$

1) Transformer l'équation pour la mettre sous la forme y' = ay + f(x)

2) Les solutions sont de la forme $y(x) = Ce^{ax} + yp(x)$ on identifie a et b à l'aide de l'équation

Comment trouver $y_p(x)$?

→ Si $y_p(x)$ est donnée, on vérifie qu'elle est bien solution en calculant y'_p et en l'injectant dans l'équation

→ Si on donne la forme de $y_p(x)$ (2nd degré, 1er degré, etc…) on calcule y'_pet en l'injectant dans l'équation on identifie les paramètres.

4) On détermine C en résolvant l'équation du premier degré $y(x_0) = y_0$ (si une condition est donnée)

Centres étrangers 2024 :

On considère l'équation différentielle

$$(E_0): \quad y' = y$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).

   On considère l'équation différentielle

   $$(E): \quad y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$$

   où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.
3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.

   On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.

Métropole 2024 (vrai ou faux ?)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x\,\mathrm{e}^{-x}$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Affirmation 2 :

La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' + y = 5\,\mathrm{e}^{-x}$.

DENOMBREMENT :

Cours :

Principe additif de la réunion de deux ensembles deux à deux disjoints ?

………

………

Principe multiplicatif (produit cartésien) ?

………

………

Nombre de parties d'un ensemble de n éléments ?

………

………

Nombre de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble de n éléments.

………

………

Nombre de permutations d'un ensemble fini de n éléments

………

………

Combinaison :

………

………

Résoudre un problème de dénombrement :

1) On peut modéliser le problème

2) Utiliser une formule de dénombrement. En général, il n'y a pas qu'une seule manière de faire. On peut , par exemple, compter combien de positions un élément peut prendre puis fixer cet élément et compter combien de positions un autre élément peut prendre…etc. On fait alors le produit du tout (principe multiplicatif). Attention on peut être amené à compter plusieurs fois un élément dans ce cas, penser à diviser.

3) En procédant par disjonction des cas et faire la somme des cardinaux des ensembles.

Amérique du sud 2024 :

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2.

On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante :
On pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2, puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire?

………

………

………

………

………

………

Centres étrangers 2024 :

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.
À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.
Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus.
Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est $(4; 5; 1)$.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. a. Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
   b. En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

………

………

………

………

………

………

Asie 2024 :

Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA).

Affirmation 3 : Il existe 20 634 codes qui contiennent au moins un 0.

Polynésie 2024 :

Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves de terminale.

Elle veut former un groupe de 5 élèves. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe de 5 élèves ?

La professeure s'intéresse maintenant à l'autre spécialité des 31 élèves de son groupe :

— 10 élèves ont choisi la spécialité physique-chimie ;
— 20 élèves ont choisi la spécialité SES ;
— 1 élève a choisi la spécialité LLCE espagnol.

Elle veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité SES. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe ?

SOMMES DE VARIABLES ALEATOIRES

Cours :

Linéarité de l'espérance :

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Pour des variables indépendants, relations sur la variance :

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale :

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Espérance, variance et écart-type d'une somme de n variables aléatoires ou de la moyenne de ces variables.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Justifier la décomposition d'une variable en sommes de variables

Il suffit de comprendre le contexte de l'exercice et de le justifier « en français »

Asie 2022 :

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking.

Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros.

Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.

On appelle :

Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet;

C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.

On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	

a. Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y=6)$.

b. Justifier que : $C = 51\,500 - 850Y$.

Calculer l'espérance d'une variable aléatoire :

Pour une Variable quelconque simple (1ère) :

1) Etablir la loi de probabilité de la variable
2) Utiliser la formule : $E(X) = \sum x_i \times p(X = x_i)$

Pour une Variable qui suit une loi binomiale : $E(X) = n \times p$

Pour une Variable définie comme une somme de variables :

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(a \times X) = a \times E(X)$

Loi quelconque de niveau 1ère :

Pour les quatre questions suivantes on s'intéresse à l'expérience aléatoire suivante : on pioche au hasard deux jetons indiscernables au toucher, sans remise, dans une urne contenant 2 jetons rouges et m jetons verts, avec $m \in \mathbb{N}^*$.
Le joueur gagne 1 euro pour chaque jeton vert tiré, il perd 2 euros pour chaque jeton rouge tiré.
On note X la variable aléatoire associée à son gain algébrique.

Quelle est la plus petite valeur de m pour que le joueur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Avenir 2024 :

On lance deux dés non truqués à 6 faces puis on multiplie les deux chiffres obtenus.

- on lance 7 fois notre paire de dés de manière identique et indépendante ;
- on note p la probabilité d'obtenir un nombre impair ;
- on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on a obtenu un nombre impair.

Combien de fois peut-on espérer obtenir un nombre impair ?

Centres étrangers 2024 :

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.
À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.
Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus.
Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est $(4;5;1)$.

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché.
Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X_1, X_2, et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_1

On note $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S.
6. Déterminer $P(S = 24)$.
7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
   a. Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
   b. En déduire la probabilité de gagner un lot.

Calculer la variance d'une variable aléatoire

Pour une Variable quelconque simple (1ère) :

Utiliser la formule : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Pour une Variable qui suit une loi binomiale : $V(X) = n \times p \times (1 - p)$

Pour une Variable définie comme une somme de variables INDEPENDANTES

$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ et $V(a \times X) = a^2 \times V(X)$ (pour toute var)

Pour l'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Amérique du Nord 2022 :

Dans le cas où Paul se rend à la gare en voiture, on note T la variable aléatoire donnant le temps de trajet nécessaire pour se rendre à la gare. La durée du trajet est donnée en minutes, arrondie à la minute. La loi de probabilité de T est donnée par le tableau ci-dessous :

k (en minutes)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(T = k)$	0,14	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0,10	0,08	0,07

Calculer la variance de cette variable aléatoire :

Avenir 2024 :

Pour les quatre prochaines questions, on s'intéresse à l'expérience aléatoire suivante : on lance une roue divisée en m secteurs identiques, $m - 1$ noirs et un blanc, pour un entier $m \geq 1$.
Le joueur qui fait tourner la roue gagne la partie si la roue s'arrête sur le secteur blanc.
On fera l'hypothèse que les lancers de roue sont indépendants les uns des autres.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On répète n fois cette expérience aléatoire avec $m \geq 1$. La variable aléatoire X compte le nombre de victoire(s). Pour quelle valeur de m, l'écart-type de X est-il maximal ?

....

....

....

....

Métropole 2024 :

Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2.

La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution.

La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :

— L'espérance $E(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$;

— L'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$.

a. Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.

....

....

....

....

....

....

Métropole 2024 :

On interroge au hasard dix étudiants.

Les variables aléatoires $N_1, N_2, \ldots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615).

Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \ldots + N_{10}$.

Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.

On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.

a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice?

b. Justifier que $E(M) = 12{,}3$ et $V(M) = 0{,}47355$.

....

....

....

....

....

....

....

....

INEGALITES ET PROBABILITES

Cours :

Inégalité de Byenaimé-Tchebychev :

....

....

....

....

Inégalité de concentration :

....

....

....

....

Loi des grands nombres :

....

....

Utiliser l'inégalité de Byenaimé-Tchebychev

- Utiliser l'inégalité de Concentration
  $p(|M_n-\mu|\geq\delta)\leq\frac{V(X)}{n\delta^2}$ la transformer en $1-p(|M_n-\mu|<\delta)\leq\frac{V(X)}{n\delta^2}$
- Puis isoler n

Métropole 2024 :

Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à 53,5 et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,722 75.

À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

....

....

....

....

....

....

....

....

Métropole 2024 :

On note M la variable aléatoire qui donne la moyenne à un contrôle noté sur 20 d'une classe. E(M) = 12,3 et V(M) = 0,47355

À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.
« La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Quelle doit-etre la taille minimale de la classe pour être sur à 95 % que la moyenne de la classe soit comprise entre 10,3 et 14,3 ?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....